513
S15m

M. SIMON

METHODIK DER ELEMENTAREN ARITHMETIK

IN VERBINDUNG MIT ALGEBRAISCHER ANALYSIS

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
511513
Si5m
MATHEMATICS
DEPARTMENT

3.20—80

9.07

e der **Mathematischen,**
der T
ch allen Richtungen hin
weite
rtrauen und Wohlwollen
zahlr
te von Erfolg begleitetes
Bemi
h hoffe, daß bei gleicher
Unte
länner des In- und Aus-
lande
hrenden und Lernenden
in W
sein werden. **Verlags-**
aner
em Gebiete werden mir
desha
Werke über denselben
Gege
ts sehr willkommen sein.
U
ache ich ganz besonders
auf d
zu Göttingen, Leipzig,
Münc
e der Mathematischen
Wiss
en die Arithmetik und
Algel
hanik, die Physik, die
Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen wird. Eine **französische Ausgabe,** von französischen Mathematikern besorgt, hat zu erscheinen begonnen.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen,** die **Bibliotheca Mathematica** (Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften), das **Archiv der Mathematik und Physik,** die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,** die **Zeitschrift für Mathematik und Physik** (Organ für angewandte Mathematik), die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht,** die **Mathematisch-naturwissenschaftlichen Blätter,** ferner **Natur und Schule** (Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen), die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“.** Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die unentgeltlich in 30000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte **Ausführliche Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten,** 100. Ausgabe [XLVIII u. 272 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.

The person charging this material is responsible for its return to the library from which it was withdrawn on or before the **Latest Date** stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY AT URBANA-CHAMPAIGN

FEB 8 1973

FEB 8 REC'D

L161—O-1096

METHODIK DER ELEMENTAREN ARITHMETIK

IN VERBINDUNG MIT ALGEBRAISCHER ANALYSIS

VON

Dr. MAX SIMON

STRASSBURG I. E.

MIT 9 TEXTFIGUREN

LEIPZIG UND BERLIN

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1906

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

513
Si5m

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS
URBANA

DEM ANDENKEN
MEINES LEHRERS UND VÄTERLICHEN FREUNDES

HEINRICH BERTRAM

WEILAND EHRENBÜRGER DER STADT BERLIN

DEM REFORMATOR DES BERLINER VOLKSSCHULWESENS
GEWIDMET

256396

UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY

Vorwort.

Die vorliegende Schrift ist der Abdruck einer Vorlesung, welche der Verfasser im Sommersemester 1904 an der Kaiser Wilhelms-Universität gehalten hat. Der Zweck derselben war, den Studierenden die Ziele des arithmetisch-algebraischen Unterrichts der neunklassigen höheren Schulen zu zeigen und sie anzuleiten, den zusammenfassenden Überblick auf der obersten Stufe methodisch zu geben. — Die Schrift zerfällt in zwei nebeneinander herlaufende Teile: die Entwicklung des Zahlbegriffs vom Zählen an bis zu den komplexen Zahlen und die Auflösung der algebraisch auflösbaren Gleichungen. Der Begründung des Begriffs und der Rechnungsregeln der Reihenzahlen ist besondere Sorgfalt gewidmet, der Verfasser hat sich dabei wesentlich an die Georg Cantorsche Methode gehalten, weil sie s. E. wesentliche Vorzüge vor der Dedekindschen und Weierstraßschen besitzt. Eine geringfügige Modifikation ist durch die Auffassung des Verfassers vom Grenzbegriff als einer Kategorie d. h. eines irreduzibeln Grundvermögens der Vernunft bedingt. Die ganze Entwicklung wird beherrscht von der Ausbildung des Funktionsbegriffs, dessen zentrale Stellung im Unterricht der Verfasser schon seit mehr als 20 Jahren betont hat.

Straßburg i. E.

Max Simon.

Inhalt.

			Seite
Einleitung			1— 4
I.	Abschnitt.	Zahl und Zählen	4—11
II.	„	Addition	11—13
III.	„	Subtraktion	13—18
IV.	„	Die Einführung der negativen Zahlen	18—20
		Die Operationen 2. Stufe.	
V.	„	Multiplikation	20—25
VI.	„	Division	26—31
VII.	„	Bruchrechnung	31—35
VIII.	„	Dezimalrechnung	35—40
IX.	„	Rechnen mit benannten Zahlen	40—41
X.	„	Gleichungen ersten Grades	41—44
XI.	„	Vom Rechnen mit Reihenzahlen	44—52
		Die Operationen 3. Stufe.	
XII.	„	Potenzierung und Radizierung	52—59
XIII.	„	Die quadratische Gleichung	59—66
XIV.	„	Der Logarithmus	66—69
XV.	„	Der binomische Satz	70—75
XVI.	„	Kubische Gleichung	76—79
XVII.	„	Komplexe Zahlen	79—85
XVIII.	„	Fortsetzung der Gleichungen dritten Grades	85—86
		Gleichungen vierten und fünften Grades	86—89
XIX.	„	Die Exponentialfunktion	89—97
XX.	„	Der natürliche Logarithmus	97—106

Einleitung.

Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis.

Meine Herren! Die elementare Arithmetik umfaßt die sieben Rechnungsarten bis einschließlich des gemeinsamen Bandes der Operationen dritter Stufe, des allgemeinen Binoms und die Hand in Hand damit gehende Entwicklung des Zahlbegriffs. E. E. Kummer sagt (Rede vom 22. März 1866), daß die allmählige Abstreifung der Beschränkungen des Zahlbegriffs den wesentlichen Inhalt der Arithmetik ausmache. Die elementare Algebra behandelt die Lehre von der Auflösung der Gleichungen bis zum vierten Grade und den Nachweis, daß die Gleichungen von mehr als viertem Grade generaliter unauflösbar sind.

Zugleich verfolge ich den Zweck Sie anzuleiten, wie man den Stoff in den höheren Schulen behandeln kann. Wohl gilt für den Lehrer in erster Linie das *principium individuationis*; die einzelne Lehrperson muß sich den Stoff innerlich frei gestalten und gewissermaßen für sich erfinden, aber zu dieser inneren Arbeit muß doch wieder Material geliefert werden.

Wenn Sie an Ihre Jugendzeit zurückdenken, so wird den meisten der erste Unterricht in der „Buchstabenrechnung“ noch in der Erinnerung als äußerst öde erscheinen, und dem Lehrer geht es meistens ebenso, und doch gibt es, richtig gehandhabt, kaum einen dankbareren Lehrstoff.

Vor allem gibt es kein Gebiet, auf dem der rein historische Gang so wenig angezeigt ist wie auf diesem. Poincaré sagt zwar 1899 im Enseignement: „Wie die Zoologie behauptet, daß die embryonale Entwicklung in kurzer Zeit die Geschichte aller Vorfahren der geologischen Epochen wiederholt, so muß auch bei der Entwicklung des Geistes der Kinder die Geschichte unser Lehrer sein.“

Meine Herren, erstens ist der zoologische Vordersatz falsch, wie Ihnen Ihre Zoologen bestätigen werden, und zweitens sind die Untertertianer, mit denen man die wissenschaftliche Arithmetik beginnt, über den embryonalen Zustand einigermaßen hinaus. Es sind Menschen, denen die vier Spezies mit ganzen und gebrochenen Zahlen, Regel de tri usw. ganz vertraut sind. Wollte man den historischen

Standpunkt ganz streng festhalten, so käme 2 vor 1 und 10 vor 9. Es gilt nur, und das gibt auch Poincaré zu, diesen jungen Menschen gegenüber den Satz Jacobis aus seiner Antrittsrede vom 7. Juli 1832 zum Bewußtsein zu bringen: „*Mathesis est scientia, eorum, quae per se clara sunt.*“ Aber das ist gerade der schwierige Punkt. Nirgends spielen die Scheinbeweise eine solche Rolle wie hier. Es gibt noch heute genug Schulbücher, in denen „bewiesen“ wird, daß $a^0 = 1$ ist. Noch 1872 konnte Dedekind, der Altmeister der Zahlentheorie, in seiner genialen Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ sagen: „und man gelangt auf diese Weise zu wirklichen Beweisen von Sätzen wie z. B. $\sqrt{2}\ \sqrt{3} = \sqrt{6}$, welche meines Wissens bisher nie bewiesen sind.“

Die Reform des arithmetischen Unterrichts ging von Weierstraß aus, der auch darin eine Ausnahmestellung einnimmt, als seine Gedanken nicht erst hundert und mehr Jahre nach seinem Tode, man denke an Gauß und Monge, sondern schon bei seinen Lebzeiten in die Schule drangen. Die Notwendigkeit, seine funktionentheoretischen Sätze streng zu begründen, zwang Weierstraß, sich mit dem philosophischen und psychologischen Kern des Zahlbegriffs zu beschäftigen und die Rechnungsregel auf ihre Tragweite zu prüfen. Während Weierstraß aber sich auf das für seinen Zweck Nötigste beschränkte, hat der bedeutendste seiner direkten Schüler, G. Cantor in Halle, die ganze Kraft seines Geistes in den Dienst der Ausbildung des Zahlbegriffs gestellt. Sie finden seine Arbeiten in der Hauptsache zusammengestellt in den „*acta mathematica*“ vom 2. Juni 1883. Unabhängig von Weierstraß und früher als er sind Hermann und Robert Graßmann zu nennen, aber Hermann Graßmann fand so geringe Beachtung bis ganz gegen das Ende seines Lebens, daß er sich von der Mathematik abwandte und in Sanskrit und Musik seinen Trost fand.

Wenn nun auch, was die Strenge betrifft, durch den Einfluß von Weierstraß und seiner Schüler einigermaßen Besserung zu konstatieren ist, so ist der andere Übelstand, unter dem der arithmetische Unterricht leidet, noch immer nicht gehoben. In seinem Referat zur Direktorenkonferenz der Elsaß-Lothringischen höheren Lehranstalten vom 30. November und 1. Dezember 1877 sagte mein Korreferent Lorberg: „Ein wahres Chaos dagegen ohne Ordnung und Zusammenhang zeigen alle Programme der deutschen höheren Lehranstalten, Realschulen I. Ordnung wie Gymnasien, hinsichtlich des algebraischen Pensums, welches sich an den mit der Sekunda abschließenden systematischen Teil anknüpft.“ Und in meiner Methodik in Baumeisters Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre von 1895 setze ich hinzu: „Aber nicht nur auf der obersten Stufe herrscht Planlosigkeit, sondern der ganze arithmetische Unterricht bedarf dringend der völligen Umänderung. Die Schüler werden mit der trockensten

Buchstabenrechnung gelangweilt, mit dem unglaublichsten Formelkram geödet, der weder in der reinen noch in der angewandten Mathematik jemals gebraucht wird. Man denke nur an die dutzendweise ineinander geschachtelten Klammern, an die Gleichungssysteme mit drei, vier und mehr Unbekannten, bei denen schließlich durch irgend einen verzwickten Kniff die Reduktion auf die quadratische Gleichung erzwungen wird, an die Ansatzaufgaben ohne Sinn und Verstand und ähnliches. Was man an Formeln wirklich braucht, kann ein arabischer Schreibkünstler mit seiner Rohrfeder auf eine Münze schreiben.

Dabei ist das zusammenschließende Ziel nirgends so deutlich, so absolut klar wie hier: es ist die Vorbereitung auf die Funktionentheorie. Ohne den Begriff der Funktion, den weittragendsten, den die Mathematik geschaffen, kann weder die analytische Geometrie, noch ein einziges physikalisches Gesetz, und wäre es $s = ct$, verständlich gemacht werden, ja nicht einmal der Algorithmus unserer Division. Ich habe das schon vor 20 Jahren in meinen „Elementen der Arithmetik“ als Vorbereitung auf die Funktionentheorie rückhaltlos ausgesprochen, aber nirgends ist der Schlendrian so zäh, nirgends brechen sich die einfachsten Wahrheiten so schwer Bahn wie in der Schule.

Die Reform des Unterrichts liegt in der starken Betonung des philosophischen und besonders des psychologischen Elementes; der Schüler wie der Mathematiker muß sich den Zahlbegriff in vollem Umfange durch eigne psychische Arbeit erwerben, bei welcher Arbeit allerdings die Vererbung eine außerordentliche Erleichterung gewährt. Mungo Park erzählt, daß die Neger, wenn sie Zahlen, die über zwei hinausgingen, genau angeben sollten, infolge der geistigen Überanstrengung in Tränen ausbrachen; in Labrador gibt es noch heute einen Volksstamm, der zählt eins, zwei, drei, unendlich; unsere Knaben, übrigens auch die der Neger in Amerika, haben von Mengen bis zu fünf inklusive eine intuitive Erkenntnis ohne alles Zählen.

Vom Zählprozeß muß ausgegangen werden, er schafft das Material des Rechners; die Zahlreihe (ZR) und alle Rechenoperationen haben mehr oder minder ausgesprochen den Zweck, den Zählprozeß abzukürzen.

Schon 1623 definierte J. H. Alsted: *Arithmetica est scientia bene numerandi*, und doch wird das Zählen vom wissenschaftlichen Lehrer meist völlig vernachlässigt, der es dem Elementarlehrer überläßt. Ja, meine Herren, da haben Sie noch einen und nicht den geringsten Schädling des mathematischen Unterrichts, den Elementarlehrer, der infolge Geldmangels der Verwaltung den mathematischen Unterricht bis in die Quarta hinein gibt, und der im Lehrerseminar nicht diejenige Vorbildung erhält, die ihn dazu befähigt. Namentlich

sobald die Bruchrechnung angreift, versagt der Elementarlehrer. Ich zitiere aus dem Lorbergschen Referat: „Aber selbst wenn der algebraische Unterricht auf direkte Unterstützung durch den Rechenunterricht verzichten muß, so darf er wenigstens auf das bestimmteste die Forderung stellen, daß ihm die Schüler im Rechenunterricht nicht verdorben werden, was durch Gewöhnung an ein mechanisches und gedankenloses Rechnen unausbleiblich geschieht, in diesem Falle ist die durch den Rechenunterricht erzielte Bekanntschaft mit dem wissenschaftlichen Stoff der Arithmetik geradezu ein Nachteil, weil sie durch Abstumpfung der Wißbegierde dem arithmetischen Unterricht auch das Reizmittel der Neugierde entzieht."

Bis in die Prima hinein kämpfen wir mit diesem mechanischen Unterricht der Unterstufe und seiner Konsequenz, der Gedankenlosigkeit. Frage ich einen Primaner, weshalb ist $^4/_6 = {}^2/_3$, so erhalte ich unter 100 Fällen 99mal die Antwort: „Der Wert eines Bruches . . ." und frage ich ja weshalb, so wird derselbe Satz noch einmal und noch schneller heruntergeschnurrt. Sage ich dann, ich möchte aber gerade den Grund für diesen Satz wissen, so erfolgt tiefes aber beredtes Schweigen.

Nie darf der Rechner mechanisch rechnen, jede Zahl hat ihre Eigenart, die es zu benutzen gilt; vergleichen Sie einmal das von F. Klein kürzlich in den Annalen veröffentlichte Gaußsche Tagebuch und Kleins Bemerkung über die Eigenart des Gaußschen Genius, an der Hand von Zahlenrechnungen intuitiv die Resultate zu finden, um hinterher langsam in härtester Arbeit die Beweise zu erzwingen.

I. Abschnitt.

Zahl und Zählen.

Von entscheidender Bedeutung für die Gestaltung der Arithmetik ist die Unterstellung der Zahl unter den richtigen Oberbegriff, bzw. die richtige Ableitung. Kant unterstellte die Zahl der Zeit, deren Wesen Sukzession, und Schopenhauer und eine ganze Anzahl Kant-Interpreten vindizieren Kant die Ansicht, daß die Arithmetik gerade so die Wissenschaft von der Zeit sei wie die Geometrie die des Raumes. Da tut man Kant Unrecht, woran er allerdings nicht ganz unschuldig ist. Kant sagt gelegentlich völlig zutreffend: „Die Zahl ist die Einheit in der Verknüpfung des Mannigfaltigen zu einer gleichartigen Anschauung überhaupt, d. h. ohne Rücksicht auf das, was verknüpft wird." Aber Kant drückt sich nicht überall so klar aus, besonders scheidet er nicht die Kardinalzahl von der Ordinalzahl,

so daß das Mißverständnis Platz greifen konnte: er unterstellte die Zahl deswegen der Zeit, weil wir zum Zählen Zeit gebrauchen. Aber so wenig wie die Nadel, mit der das Kleid genäht ist, zum fertigen Kleid gehört, ebensowenig geht die Zeit in die fertige Anzahl, in die Kardinalzahl, ein. Mit demselben Recht könnten wir die Geometrie und die Logik der Zeit unterstellen, denn zum Auffassen einer Figur und zu jedem Schluß gebrauchen wir Zeit. Anders ausgedrückt: Die Zahl fixiert im Bewußtsein die Art und Weise der Zusammensetzung einer Vorstellung, die Zeit brauchen wir zur Zusammensetzung. Indem der erste Eindruck noch im Bewußtsein zeitlich haftet, wenn der neue hinzutritt, verknüpfen sich beide und verschmelzen zu 2, in der wir nun diese Zusammensetzung für alle Zeit niederlegen. Anders liegt die Sache mit der Ordinalzahl. Unsere absolute Sicherheit, daß 15 mehr als 5, beruht darin, daß wir uns des zeitlichen Bildungsganges bewußt sind und wissen, daß 5 früher ist als 15. Aber auch für die Ordinalzahlen und die ganze Rechnung schwindet das zeitliche Element allmählich völlig aus dem Bewußtsein des Rechners. Ein einziges Mal ist der ernsthafte Versuch gemacht, die Gesetze der Arithmetik aus der Zeitanschauung abzuleiten, und zwar von Sir Rowan Hamilton, dem Erfinder der Quaternionen (*Transactions of the Royal Irish Academy* Vol. 17 p. 283 (1837). Er scheiterte, wie er mußte, an den komplexen Zahlen, und in seinem Hauptwerk von 1833 erklärte er, daß er die Interpretation algebraischer Beziehungen durch Zeitanschauung durchaus nicht als notwendig verstanden wissen will. Die Zeit können wir uns nur unter dem Bilde einer geraden Linie vorstellen und sie versagt einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit gegenüber. Gewiß, die Begriffe: mehr, minder, gleich können auf Zeitanschauung gegründet werden, auch das kommutative Gesetz durch Vertauschung von Vergangenheit und Zukunft, schwieriger schon das assoziative Gesetz. Aber was die Auffindung arithmetischer Gesetze betrifft, so ist die Raumanschauung weit ausschlaggebender gewesen als die zeitliche. Dies müssen wir Lange, dem bedeutenden Verfasser der Geschichte des Materialismus zugeben, wenngleich seine Ansicht, daß der Raum für die Zahl notwendig, schon von dem großen Gegner Kants, von Bernhard Bolzano, zurückgewiesen ist. Die Raumanschauung gibt das kommutative Gesetz durch Vertauschung von rechts und links, das assoziative noch unmittelbarer (Fig. 1), der Raum hat uns in der Kongruenz den Begriff der Gleichheit zuerst gegeben, und ebenso uns über größer und kleiner belehrt, das kommutative Gesetz der Mul-

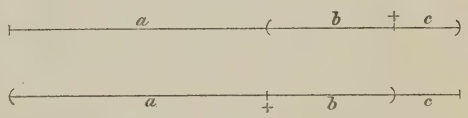

Fig. 1.

tiplikation $ab = ba$ ist, bis ich es auf den Schluß von n auf $(n + 1)$ gegründet, immer räumlich bewiesen durch Vermittlung des Rechtecks. Die ganze Algebra der Griechen bis zu den Gleichungen 3. Grades inklusiv war räumlich eingekleidet.

Die fertige Zahl aber und ihre Reihe ist vom Raume so unabhängig wie von der Zeit. Auf dieser Unabhängigkeit beruht geradezu ihre Erfindung und ihr Gebrauch zum Rechnen, d. h. zum Vergleichen bzw. Messen der Mengen und Größen. Immer wieder hat der Lehrer hierauf hinzuweisen: Jedes einmal richtig gerechnete Exempel ist ewig richtig und an jedem Ort. Auf dieser Erkenntnis beruhen alle Funktionstabellen, das Einmaleins wie die Logarithmentafel, die Faktorentabelle wie die Tafeln Legendres. Auf dieser Erkenntnis beruht die Addition, weil ihr zufolge der Zählprozeß an jeder beliebigen Stelle unterbrochen und wieder aufgenommen werden kann, auf ihr der Nutzen der Addition, weil wir in der Zahlenreihe (ZR) und den Namen der Zahlen über eine unbegrenzte Anzahl ausgeführter Additionen der vorangegangenen Generationen verfügen, eine Riesensumme gesparter Arbeit, das einzig wirklich unzerstörbare Kapital. Und nun zur Sache!

Wir müssen in Tertia wie in Nona und wie bei der Repetition in Prima vom Zählen ausgehen, der fundamentalen und in gewissem Sinne einzigen Operation. Die Rechenoperationen sind erfunden, um Zeit zu sparen, und in diesem Sinne ist das *bene* zu verstehen; die Rechenkunst ist die Kunst: nicht zu rechnen, sondern zu denken. Man beginnt am besten mit den drei Fragen: „Was zählen wir? Warum zählen wir? Wie zählen wir?“ Hierbei wird sehr schnell klar, daß die Arithmetik eine reine Vernunftwissenschaft ist, und ihre Objekte, die Zahlen, Begriffe sind, allerdings Begriffe, welche wie die der Geometrie, unter allen, die aus der Sinnlichkeit durch eine während Äonen fortgesetzte Idealisierung hervorgegangen sind, ihren Ursprung aus der sinnlichen Erfahrung, „den Erdgeruch der Sinnlichkeit“, am deutlichsten an sich tragen. Die Zahl aber entspringt aus der durch Vererbung immer mehr entwickelten logischen Funktion des Vergleichens und Zuordnens von Komplexen oder Mengen, das sind Zusammenfassungen von Vielem zu Einem. Zusammenfassen und Trennen sind die arithmetischen Grundtatsachen, entsprungen aus der der Arithmetik zugrunde liegenden Erkenntnis: Einheit und Vielheit sind subjektive Begriffe, sie liegen in uns, nicht in den Dingen. Auch dem Tertianer ist es klar, daß das Brot dem Bäckergesellen eins ist; dem, der es zerschneidet, mehreres; daß die Frau des Arbeiters in der Mark die Vielheit sieht, mit der sie die Vielheit der Bedürfnisse befriedigen soll. Der Lehrer, dem dieses philosophische Wissen fehlt, wird sich vergeblich bemühen, seinen Schülern die Bruchrechnung oder auch nur die Multiplikation klar zu machen.

Und hier haben wir die eigentliche Kategorie, d. h. den nicht weiter zurückzuführenden Grundbegriff. Poincaré sagt a. a. O.: „Die Zahl ist der einzige primitive, irreduktible und intuitive Begriff"; abgesehen davon, daß Abstand und Richtung mindestens ebenso irreduktibel, primitiv und intuitiv sind, werden die einzelnen Zahlen aus den primitiven und irreduktibeln Begriffen, Einheit und Vielheit, deren psychologischer Ursprung das Ich und das Nicht-ich ist, aufgebaut. Dabei habe ich schon gesagt, daß die einfachsten Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 jetzt intuitiv erfaßt werden und daß diese Zahlenintuition sehr geübt werden kann; der Rechenkünstler Dahse erfaßte Mengen über 100 wie wir etwa 2 und 3.

Man frage die Schüler, ob und was sie gezählt haben und bereite so die Antwort auf die erste Frage vor: Gemäß der Grundtatsache fassen wir Vieles zu Einem zusammen, und was wir zählen, sind solche Einheiten, die wir Komplexe nennen. Es gibt wenige Seelenvermögen, von denen so häufig Gebrauch gemacht wird. Die Schüler bringen, und zwar mit großem Vergnügen, immer neue Beispiele an von der Klasse, der Kompagnie, der Sammlung an bis zum Wald, dem Buch usw. Dabei muß man sie aufmerksam machen, wie das Symbol der Zusammenfassung bei der Klasse im Ordinarius, der innere Grund die gemeinsame Vorbereitung, bei der Kompagnie im Hauptmann, beim Buch im Einband, beim Stoß Teller, wo es nicht ganz so nahe liegt, in der gemeinsamen Grundfläche usw. besteht. Es geht mehr als eine Stunde damit hin und bei der Repetition kommen immer neue Beispiele; der Weg als Komplex von Schritten bzw. Metern, die Kette, ja sogar die sieben Todsünden. Man geht dann auf Komplexe von Komplexen wie Schule, Bataillon, Stadt als Komplex von Straßen, die selbst Komplex von Häusern, die wiederum Komplex von Zimmern, Jahr usw. ein. Die einzelnen Vorstellungen, welche in dem Sammelbegriff gebunden sind, heißen wie bei der Kette Glieder oder Elemente des Komplexes.

Umgekehrt hindert nichts, jede Einheit als Vielheit anzusehen, und das ist später für den Bruchbegriff entscheidend; die Apfelsine, der Apfel, das Kommißbrot, der Baumstamm, die Strecke, ja, in der alten Reichswehrordnung den Menschen.

Die zweite Frage: Warum zählen wir? Auch hier wende man sich zunächst an den Schüler. Hier tritt nun die schon erwähnte Grundfähigkeit des Vergleichens in Tätigkeit. Meines Erachtens liegt in ihr der Ursprung der Stammbegriffe Quantität und Qualität; mit dem psychischen Akt des Aufmerkens verbindet die Vernunft die Vergleichung, und wenn sich dieselbe nur auf die Art und Weise der Zusammensetzung einer Vorstellung richtet, so entwickelt sich der Begriff Größe; richtet sie sich auf die Art und Weise, wie unsere Sinne affiziert werden, so entwickelt sich der Begriff Qualität.

Zum Zweck der Ordnung, Übersicht und Verwaltung sind wir gezwungen, die verschiedensten Komplexe in bezug auf die Art und Weise ihrer Gliederung zu vergleichen, die Heere und Flotten, die Fehlermenge der Extemporalien, den Ernteausfall, die Dicke der Hefte, usw. Diese Vergleichung ist nun zunächst eine direkte. Wir richten der Reihe nach unsere Aufmerksamkeit auf je ein Glied des Komplexes A und des Komplexes B, und indem wir so durch fortwährendes Zusammenfassen und Trennen aus A und B eine Reihe von Komplexen bilden, wird schließlich A oder B wiederhergestellt, aber es ist etwas Neues hinzugetreten: die Ordnung der Glieder, die bestimmte Reihenfolge. Aus dieser direkten Vergleichung entspringen jetzt die drei fundamentalen Relationszahlbegriffe: mehr, minder, gleich, die man auch größer, kleiner, gleich nennt. Letzteres tritt auf, wenn jedem Glied in A ein Glied in B zugeordnet werden kann, und umgekehrt; man sagt, die Komplexe A und B sind aufeinander abzählbar.

Vergleicht man statt zweier Komplexe mehrere, so kommt man auf experimentellem Wege zu den Beziehungen: Wenn $A \gtrless B$ und $B \gtrless C$, so ist $A \gtrless C$; damit wird eingesehen: Jeder Komplex A kann in allen Fragen, die sich auf die Art und Weise der Gliederung beziehen, durch jeden ihm an Gliederzahl gleichen ersetzt werden.

Dieser Satz ermöglicht die indirekte Vergleichung von Komplexen, er ermöglicht die Vergleichung räumlich getrennter Komplexe, wo die direkte schwierig und die zeitlich getrennter, wo sie unmöglich ist. Es entsteht dem Menschengeist die Aufgabe: Einen Komplex zu schaffen, der von Zeit und Raum unabhängig ist, der Vergleichung aller Komplexe vermittelt, in derselben Weise, wie man aus ähnlichen Gründen im Gold die Münze geschaffen hat, d. h. eine Ware, die von jedem jederzeit gegen jede andere Ware getauscht werden kann. Dieser Münzkomplex muß an Gliedern unerschöpflich sein, da sich aus ihm zu jedem noch so vielgliedrigen Komplex ein gleicher ausheben lassen muß und seine eigne Ordnung darf keine Zeit kosten. Alle diese Forderungen erfüllt der Komplex der Zahlen in der Zahlenreihe.

Sooft wir zwei Komplexe direkt vergleichen, bilden wir einen Komplex, der nur aus einem Glied besteht; wir bezeichnen diese einfachste Art der Gliederung mit 1 und sagen, der Komplex hat oder fällt unter die Anzahl 1. Wir müssen die 1 als Anzahl 1 (*unus*, *μόνος*) von der 1 als Einheit (*unitas*, *μονάς*) sehr scharf unterscheiden. Die alte Auffassung, daß die 1 keine Anzahl hat, bezieht sich auf die Einheit. Noch Gemma Frisius, dessen Rechenbuch das erste weitverbreitete Rechenbuch seit der Begründung der humanistischen Schulen war, sagt 1576: *unitas ipsa non est numerus*. Alle Schwierig-

keiten, die der Kontinuitätsbegriff mit sich bringt, stecken in der Einheit, aber nicht in der 1. Indem zu dem ersten Glied bei der Auflösung und Wiederzusammensetzung (Analysis und Synthesis) ein anderes Glied tritt, entsteht ein Komplex von der nächstfolgenden Art und Weise der Gliederung; wir nennen diesen Modus 2 usf.; so entsteht die Zahlenreihe. Dieser zahlenbildende Prozeß ist unbegrenzt, und es gibt keine letzte Zahl als Anzahl; jedesmal wenn zu n Gliedern noch eins hinzukommt, entspringt aus n und 1 die neue Anzahl $(n + 1)$. Hierbei ist zu sagen, daß die Unendlichkeit der Zahlenreihe im wesentlichen auf die Unendlichkeit der Zeit zurückgeht, bzw. daß ohne eine unendliche Zeit auch eine unendliche Dauer des Zählprozesses unmöglich wäre.

Die Zahlen haben nun alle verlangten Eigenschaften:

a) Sie sind von Zeit und Raum unabhängig.

b) Sie entstehen als die einzigen Vorstellungen in geordneter, ja sogar in wohlgeordneter Reihenfolge.

c) Sie sind an Gliederzahl unerschöpflich.

d) Jede Zahl zählt die Anzahl aller Zahlen von 1 an bis zu ihr selbst ab, d. h. jede Zahl fällt unter ihren eignen Anzahlbegriff.

Jede Zahl hat also eine zwiefache Wesenheit; als Kardinalzahl ist sie der Ausdruck für eine bestimmte Art und Weise der Gliederung, id est markiert sie eine bestimmte Abstufung des Mengenbegriffs; als Ordinalzahl hat sie eine bestimmte Stellung in der Zahlenreihe, derzufolge von je zwei Zahlen a und b eine die frühere, die andere die spätere ist, und die unter die spätere fallende Menge hat die größere Gliederzahl.

Nachdem in der Zahlenreihe das Instrument des Rechners geschaffen, besteht der Zählprozeß darin, daß wir jedem Glied der abzuzählenden Menge der Reihe nach ein Glied der Zahlenreihe zuordnen mit 1 beginnend, und die Ordnungszahl des letzten Gliedes ist zugleich infolge der Eigenschaft d) die gesuchte Anzahl. Diese Anzahl spiegelt die Art und Weise der Gliederung vollständig und für ewig wieder; hat z. B. ein Komplex die Anzahl 5, so wissen wir, daß es darin ein Glied Nr. 2, ein anderes Nr. 3 usw. gibt. Dabei sehen wir während des Zählens von allen Unterschieden der Glieder ab, und nur die Zugehörigkeit zum Komplex wird beachtet. Außerdem aber ist noch ein besonderer Akt des Intellekts nötig, um die sonst unentwegt abrollende Zahlenreihe anzuhalten, den Zählprozeß abzuschließen; ein Hemmungsprinzip des psychischen Trägheitsgesetzes muß in Kraft treten, sonst kann man sich an neun Kegeln zu Tode zählen. Hierin haben wir die erste Äußerung des so entscheidend wichtigen Grenzbegriffes.

Während die Zahlen eine unabänderliche Reihenfolge haben, ist

die Ordnung jedes Komplexes mehr oder weniger willkürlich. Man sieht aber, daß eine Vertauschung von zwei Gliedern, eine Transposition, an der Anzahl nichts ändert, denn wo a fehlt, rollt die Zahl auf b und für b tritt dann a ein; hieraus folgt, daß, wenn überhaupt ein letztes Glied existiert, die Ordnungszahl desselben und damit die Anzahl des Komplexes von der Ordnung der Glieder unabhängig ist.

Diese bestimmte durch Zählen gewonnene Anzahl ist der subjektive Ausdruck für die Menge, aber auch abgesehen vom zählenden Subjekt existiert die Menge. Der objektive Ausdruck dieser Menge ist die Mächtigkeit. Dieser Begriff, den schon Aristoteles kennt, der damit das Paradoxon des Zeno vom fliegenden Pfeil, oder nach Zeno vom scheinbar fliegenden Pfeil, aufklärt, ist von G. Cantor, der von des Aristoteles' Priorität nichts wußte, genau so erfaßt wie von Aristoteles: Kann man alle Elemente einer Menge allen Elementen einer andern eindeutig zuordnen und umgekehrt, so sagt man, die Mengen sind von gleicher Mächtigkeit. Bei endlichen abzählbaren Mengen fallen Anzahl und Mächtigkeit zusammen, d. h. endliche Mengen gleicher Anzahl haben gleiche Mächtigkeit, und es liegt kein Grund vor diese Begriffe zu trennen. Anders liegt die Sache bei Mengen, die wie die Zahlenreihe einen Anfang, eine Sukzession, aber kein Ende haben.

G. Cantor faßt den Inbegriff aller Zahlen als Komplex und gibt diesem Inbegriff eine Art Anzahl, die erste transfinite Zahl ω. Man kann sich diesen Inbegriff so geordnet denken, daß erst die geraden und dann die ungeraden Zahlen kommen; dann ist es unmöglich beide Anordnungen durch eine abzählbare Anzahl von Transpositionen ineinander überzuführen und in der Tat hat jetzt der Inbegriff aller Zahlen die transfinite Anzahl $\omega + \omega$, bzw. $\omega 2$. Cantor hat in seinen transfiniten Zahlen, wie Sie schon aus diesem Beispiel sehen, Ordnungstypen für unendliche Reihen geschaffen, welche für die Lehre von den unendlichen Reihen, für Integralrechnung und Mechanik von fundamentaler Bedeutung sind.

Ich muß noch den Ausdruck „wohlgeordnet" näher erklären. Auch dieser Begriff rührt von G. Cantor her. Eine Menge ist geordnet, wenn von zwei beliebig herausgegriffenen Elementen A und B immer eins, z. B. A, das frühere, und von drei Elementen ABC, wenn A früher als B und B früher als C, dann auch A früher als C ist. Also sind z. B. die Zeitpunkte zwischen 6 und 7 und die Streckenpunkte zwischen A und B geordnete Mengen. Die Zahlen aber in ihrer Reihe sind wohlgeordnet, d. h. ihre Elemente, ein erstes voran, folgen so aufeinander nach einem gegebenen Gesetz, daß sowohl auf jedes Element wie auf jede scharf charakterisierte Gruppe von Elementen ein völlig bestimmtes Element folgt, vor-

ausgesetzt, daß es ein auf das Element, bzw. auf die Gruppe von Elementen folgendes Element überhaupt gibt. So folgt auf die Gruppe der ersten 1000 geraden Zahlen 2001. Aber wenn man auf einer Strecke AC einen Punkt B nimmt, so gibt es keinen bestimmten auf B folgenden Punkt und ebenso läßt sich kein bestimmter Zeitpunkt, der auf $6^1/_4$ folgt, angeben. Die Zeit- und Raumstrecken stellen daher geordnete, aber keine wohlgeordnete Mengen dar. Eine unendliche Menge kann also geordnet sein, ohne wohlgeordnet zu sein, sie kann auch eine wohlgeordnete Menge als Bestandteil enthalten und nicht wohlgeordnet sein. Nehme ich z. B. eine Strecke AB, halbiere sie und nehme immer die Mitte der rechten Hälfte, so bilden diese die wohlgeordnete Menge $^1/_2$; $^1/_2 + ^1/_4$; $^1/_2 + ^1/_4 + ^1/_8$; $+ \cdots$. Wenn ich aber die Strecke bis C um sich selbst verlängere und von der Verlängerung immer die Mitten der linken Hälften nehme, so ist die gesammte Menge geordnet, aber nicht wohlgeordnet.

Ich schließe Abschnitt I und verstehe unter I den Satz von der Eindeutigkeit der Anzahl: Jede durch eine bestimmte Zahl n der Zahlenreihe abzählbare Menge wird durch eben diese Zahl n abgezählt, in welcher Ordnung man ihre Glieder auch abzählt, vorausgesetzt, daß jedes Glied nicht öfter als einmal beim Zählen benutzt wird und gehe über zu:

II. Abschnitt.

Addition.

1. Zwei Komplexe A und B abgezählt durch a und b lassen sich zu einem Komplex C zusammenfassen, dessen Anzahl c zu bestimmen ist. Zu einer solchen Operation sind wir durch die Rücksicht auf unsere Zeit gezwungen, wenn es sich um die Abzählung von großen Mengen handelt. Ich wähle als Beispiel gern die Volkszählung vom 1. Dezember jedes fünften Jahres, etwa in einem Dorfe, durch das ein Bach fließt oder eine lange Straße geht, und nehme an, der Lehrer zähle links, der Bürgermeister rechts vom Bach. C heißt Summenkomplex, c Summe, a und b die Summanden. Die Anzahl c läßt sich dann dadurch schneller feststellen, daß entweder die b Elemente von B hinter die a Elemente von A der Reihe nach gezählt werden, oder von b aus den a Elementen von A, die a auf b folgenden Zahlen der Zahlenreihe zugeordnet werden. Sind A und b endlich, so folgt aus I, 1 sowohl daß auch C endlich als daß beide Zählungen dieselbe Anzahl c ergeben. Wir schreiben und sprechen:

$$c = (a + b). \tag{1}$$

2. Mit Rücksicht auf die Beantwortung der drei Fragen in I definieren wir die Addition und die Summe wie folgt:

Zu einer Zahl a, Augendus genannt, eine Zahl b, Addendus, addieren, heißt in der Zahlenreihe von a aus b der auf a folgenden Zahlen der Reihe nach abzählen. Die zuletzt gezählte Zahl ist die Summe, welche mit $(a + b)$ bezeichnet wird. Wo eine Verwechselung mit der Operation ausgeschlossen ist, wird die Klammer um den „Ausdruck“ weggelassen.

3. Aus 1 folgt, da $c = (a + b)$ und $= (b + a)$ ist, das erste Hauptgesetz der Addition: $(a + b) = (b + a)$, das kommutative Gesetz II. 1. Es braucht wohl nicht gesagt zu werden, daß hier das Weglassen der Klammer einen schweren logischen Fehler involviert.

4. Als Beispiel der Addition dienten zwei Zähler, aber wir können uns auch einen Zähler denken, der nicht an eine bestimmte Zeit gebunden ist, und der eine große Menge abzuzählen hat, etwa ein Kaufmann, Kassenbeamter, Taxator usw., usw., der Inventur macht. Man kann zufolge Abschnitt I einen Teil vormittags abzählen, dann nachmittags fortfahren. Überhaupt zerfällt beim Zählen der abzuzählende Komplex immer in den Komplex A der bereits abgezählten a Glieder und in den Komplex B der noch zu zählenden. Es hindert nichts, diese b für sich abzuzählen, und dann die Zahl c des ganzen Komplexes durch Addition von a und b zu ermitteln; dabei tritt nichts als eine zeitliche Lücke im Zählprozeß ein, aber keine in der Reihe der Zahlen, und auf deren ununterbrochene Folge kommt es allein an. Wir gewinnen also c in Form $(a + b)$. Wir können dieselbe Betrachtung auf B anwenden und z. B. die Anzahl d eines Komplexes D in der Form $d = a + (b + c)$ herzählen. Aber aus der Möglichkeit den Zählprozeß zeitlich zu unterbrechen folgt, daß wir auch zählen können $(a + b) + c$. Hiermit erhalten wir das zweite Fundamentalgesetz der Addition, das assoziative, und die Formel:

$$a + (b + c) = (a + b) + c. \tag{2}$$

Man kann zugeben, daß das assoziative Gesetz bei dieser Ableitung sich auf innere Anschauung der Zahlenreihe stützt oder, was richtiger ist, daß wir den Spezialfall $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ schon in die Definition der Addition aufgenommen haben. In einer rein formalen Addition, wie sie z. B. Hankel entwickelt hat, und nach ihm viele andere, wird dieser Spezialfall axiomatisch angenommen; aus ihm läßt sich der allgemeine dadurch, daß man von b zu $(b + 1)$ übergeht, entwickeln, dann erst wird, auch rein formal, die Addition erklärt. Ich habe schon vor 30 Jahren, ohne Hankel zu kennen, im Anschluß an Weierstraß wiederholt den Versuch gemacht, die Algebra rein formal in der Schule zu lehren, aber der Erfolg war nicht ermutigend, ich kann nur raten tunlichst den Schülern sinnliche Substrate zu geben.

5. Formel 1 und 2 lassen sich kombinieren zu dem Satz: Auch

für drei Summanden bleibt die Reihenfolge beliebig, und zwar auch so, daß wir von einem beliebigen Augendus ausgehen können, dann die beiden andern addieren und ihre Summe als Addendus benutzen. Dieser Satz drückt sich dadurch aus, daß wir $[(a + b) + c]$ ohne alle Klammern schreiben.

6. Durch den Schluß von n auf $(n + 1)$, d. h. durch die vollständige Induktion, die auch Bernoullischer oder Kästnerscher Schluß genannt wird, läßt sich der Satz für eine beliebige, aber endliche Anzahl von Summanden beweisen. Die Einschränkung liegt im Wesen des Schlusses begründet, der für Erfahrungstatsachen das natürliche Beweismittel bildet. Der Beweis besteht darin, daß man zeigt, eine Wahrheit, die für eine Menge von n Gliedern gilt, gilt auch noch für eine $(n + 1)$-gliedrige; sie gilt damit für eine $(n + k)$-gliedrige, falls man sich zur Zahl k durch beständige Vermehrung um 1 hinzählen kann, d. h. also, wenn k abzählbar ist. Für die Cantorschen Ordnungstypen gilt das kommutative Gesetz nicht, denn es ist $1 + \omega$ und auch $n + \omega$ von ω nicht verschieden, aber $\omega + (3 + 2) = (\omega + 3) + 2$, z. B. die Menge der ungeraden Zahlen vermehrt um die fünf ersten geraden Zahlen ist von derselben Ordnung wie $(\omega + 3) + 2$, d. h., das assoziative Gesetz bleibt für die transfiniten Zahlen bestehen.

Nunmehr ist unser praktisches Verfahren völlig begründet.

7. Ist $b < b'$, so ist $a + b < a + b'$ (assoziat. Ges.).

Ist $a \leqq a'$, so ist $a + b \leqq a' + b$. Der Satz folgt aus der räumlichen Anschauung der Zahlenreihe unmittelbar, er kann aber auch durch das assoziative Gesetz bewiesen werden; $a < a'$ heißt a' setzt zu seiner Bildung a voraus, also:

$$a' = a + \alpha;\ a' + b = a + \alpha + b = (a + b) + \alpha;\ a' + b > a + b.$$

III. Abschnitt.

Subtraktion.

Durch Abzählung zweier Komplexe stellen wir ohne weiteres die Beziehungen $><=$ fest, aber die Begriffe $>$ und $<$ sind vieldeutig und lassen sich abstufen wie der Mengenbegriff, d. h., es entsteht die Aufgabe, den Unterschied zweier abzählbaren bzw. abgezählten Mengen zahlenmäßig festzustellen. Wir nennen die Operation Subtraktion und sehen, daß ihr Kern die Vergleichung ist in dem eben festgesetzten Sinne.

Meine Herren, keine Operation wird so im Unterricht mißhandelt wie die Subtraktion, und hier liegt die Hauptquelle des geringen Erfolges. Selten oder nie scheidet der Lehrer die drei, ja sogar sechs

ihrem logischen Inhalte nach ganz verschiedenen Operationen, die in der einen, welche Subtraktion heißt, zusammenfließen. Ich muß daher die Subtraktion ausführlicher besprechen.

1. Das Vergleichen wird zunächst durch gegenseitiges Zuordnen der Glieder ausgeführt, wie z. B. bei Turnspielen, wo zwei Parteien aus den Spielern gebildet werden, beim Croquet usw. Man wird gut tun, auch ungleichartige Mengen wie Spaten und Arbeiter, Gewehre und Soldaten usw. zu vergleichen. Da die Anzahl die Art und Weise der Gliederung eines Komplexes genau wiederspiegelt, so kann für die Vergleichung jeder Komplex durch den Komplex gleicher Anzahl ersetzt werden, welcher aus der Zahlenreihe von 1 an ausgeschnitten wird. Die natürliche Zuordnung besteht darin, die gleichgenummerten Glieder einander zuzuordnen, also 1, 1; 2, 2; 3, 3 usw.; es bleibt dann im größeren Komplexe, den wir vorläufig samt seiner Anzahl Minuendus nennen, der Komplex der Glieder vom Subtrahendus exklusive bis zum Minuendus inklusive frei, und der Komplex dieser freien Glieder liefert den Unterschied beider Mengen, die Differenz $(b - a)$.

2. Das Abzählen dieses Komplexes kann beliebig unterbrochen werden, d. h.,

$$\text{(I)}\quad (b - a) = (x - a) + (y - x) + (z - y) + \cdots (w - v) + (b - w).$$

Man sieht, wie viel richtiger die österreichische Methode ist als die unsere, die fast überall verlassen ist, auch neuerdings hier und da in Deutschland verlassen wird. Wir sehen, daß aus der Vertrautheit mit der Zahlenreihe eine außerordentliche Abkürzung der Operation hervorgeht, indem wir zunächst zählen bis zu der ersten Zahl, die mit dem Minuendus in den Einern übereinstimmt, dann auch noch in den Zehnern, Hunderten usw. Vom wirklichen Zählen ist gar keine Rede, da wir ja wissen, nach Abschnitten von 10 kehrt die letzte Ziffer wieder, nach 100 die beiden letzten, usw.

3. Man sieht sofort, daß die Vergleichung stets verbunden ist mit einer Trennung des Minuendenkomplexes b in den Subtrahendus a und die Differenz $(b - a)$ und ferner, daß, weil die Aufmerksamkeit sich nur auf den Komplex der freien Glieder des Minuendus richtet, die gebundenen aus dem Bewußtsein schwinden, d. h., daß dem Minuend eine dem Subtrahend anzahlgleiche Menge entzogen wird.

4. Diese drei Operationen: Vergleichung, Trennung, Verminderung sind also in praxi verbunden und fließen daher in eine zusammen, welche wir eben Subtraktion nennen, d. h., seit Chuquets *triparty* beendet (1482) *à l'honneur de la sainte trinité*, wo die Operation, die bis dahin Subduktion heißt, mit *soustraire* bezeichnet ist. Es steht nichts im Wege, die Resultate aller drei Operationen: Differenz, Ergänzung, Rest, da sie der Zahl nach identisch sind, gleich zu bezeichnen, und zwar mit $(b - a)$ (Zahlenintervall von a bis b) und

alle drei durch dieselbe Gleichung zu definieren $a + (b - a) = b$, d. h., durch die bekannte Definition: Die Differenz (Ergänzung, Rest) des Minuend b und des Subtrahend a ist die Zahl $(b - a)$, welche zu a addiert b gibt. Daß sie völlig bestimmt ist, folgt aus II, Formel 2, bzw. II, Nr. 7.

5. Der Subtrahend ist in jeder der drei Auffassungen eine Operation der Trennung, während die Addition Verknüpfung ist; die eine ist gerade so ursprünglich wie die andere, und es ist keineswegs nötig, von vornherein die Subtraktion als inverse Operation der Addition aufzufassen.

6. Jede der drei in der Subtraktion verbundenen Operationen besitzt noch eine Begleitoperation, die begrifflich von ihr verschieden, sie in der Praxis ersetzen kann. Man kann fragen: Welche Menge unterscheidet sich von der gegebenen Menge um b? Welche Zahl gibt um a vermehrt b? Wieviel kann ich von b wegnehmen, damit a übrig bleibt? Alle drei Fragen werden dadurch beantwortet, daß man von b aus die a vorangehenden Zahlen der Reihe nach abzählt. Bezeichnet man die so gefundene Zahl mit $(b - a)_1$ so wird $(b - a)_1$ definiert durch die Gleichung $(b - a)_1 + a = b$. Aus dem kommutativen Gesetz in Verbindung mit dem assoziativen folgt, daß $(b - a)_1 = (b - a)$ ist. Danach kann die Subtraktion auch durch Rückwärtszählen in der Zahlenreihe ausgeführt werden, und jetzt tritt der Gegensatz zur Addition hervor. Es ist $(b - a) + a = b$ und $(b + a) - a$ desgl.

7. Der Subtraktion läßt sich noch eine neue Seite abgewinnen. In allen Fällen handelt es sich darum, einer Zahl b die Form einer Summe zu geben, deren einer Summand a gegeben ist. Ist b später als a, so weiß man, daß es eine solche ganz bestimmte Zahl gibt, wenn man sie momentan auch nicht kennt. Ich kann mir diese Zahl unter irgend einem Zeichen vorstellen, z. B. unter dem Bilde x, wie in der Aufgabe $x + 253 = 489$. Ich ermittele nun diese Zahl x durch eine Methode, die gerade so alt ist wie die Mathematik, und die sich schon im Papyrus Ahmes und noch 500 Jahre früher in den von Griffiths 1897 herausgegebenen Papyri von Kahun findet, durch die *Regula falsi*, zu Deutsch durch Probieren. Ich nehme für x einen Wert an, obwohl ich weiß, daß er falsch ist und verbessere ihn allmählich. Hier nimmt man für x zuerst 200, gibt 453; ich vermehre x um 30, gibt 483, und nun sind noch 6 nötig, also ist die gesuchte Zahl 236. Hier haben wir die Stelle, wo die Algebra abzweigt; aus der *Regula falsi* hat sich die Grenzmethode, der Funktionsbegriff, die Lehre von den Variabeln usw., entwickelt.

8. Daß die drei Operationen: Vergleichung, Verminderung, Trennung begrifflich verschieden sind, tritt bei der Einführung der 0 und der negativen Zahlen ganz scharf hervor. Die sogenannten negativen Zahlen bilden auch wieder eine Klippe, an der das Verständnis der

Schüler scheitert. Zunächst ist schon die Bezeichnung keine glückliche, weil die Vorzeichen minus und plus mit dem Operationszeichen verwechselt werden. Man vermeidet die Hälfte der Schwierigkeiten, wenn man statt $-a$ die Bezeichnung a' gebraucht, wie das auf meinen Vorschlag Friedrich Meyer in seinen vorzüglichen Elementen der Arithmetik getan hat, sowie Herr W. Pflieger in den seinen.

9. Zuerst versagt die Trennung, sobald a zu a ergänzt werden soll; hier hält die Verminderung noch aus, man kann a von a wegnehmen, und es bleibt nichts — Null. — Bei der Vergleichung kann die Beziehung der Gleichheit auftreten, die häufig beabsichtigt ist, und wir bedienen uns als Ausdruck für diese Beziehung wieder desselben Zeichens, weil in diesem Falle der Komplex der freien Glieder leer ist. Diese Null, das Symbol der Leerheit entspringt aus derselben Quelle wie die Anzahlen, und sie wird zur Zahl gemacht. Dieser großartige Gedanke ist von den Indern ausgeführt nach neuesten Forschungen etwa um den Beginn unserer Zeitrechnung; ihre älteste Form ist der Punkt, erst später die leere geschlossene Linie als Zeichen, daß die Null die Anzahl eines Komplexes vertritt, der als solcher noch gedacht wird, während ihm gewissermaßen zufällig die Glieder ausgegangen sind. Ihr Name ist *sunya*, das Leere, arabisch wörtlich übersetzt *as-sifr*, und daher stammt das Wort Ziffer (*zéro*), da die Null im indischen Positionssystem das weitaus wichtigste Zahlzeichen ist. Die Geschichte der Null bildete eine Streitfrage, aber es ist auch völkerpsychologisch einleuchtend, daß die Inder — das Volk, dem die Auflösung in das Nichts, die Nirwana, das höchste Ziel war — das Volk sein mußte, das das Nichts behandelte, als wäre es etwas. Das Positionssystem findet sich allerdings schon zur Zeit Sargons, 3800 v. Chr., bei den Babyloniern in ihrem Sexagesimalsystem.

Durch Einstellung der Null vor die Eins erfährt nun die Zahlenreihe ihre erste Erweiterung und $0 + 1 = 1$, formal ebenso wie real, und $0 + 1 = 1 + 0$, wo die 0 links als Nichts gedeutet werden kann und die 0 rechts als Nichts gedeutet werden muß.

Diese Doppeldeutung läßt sich vermeiden, wenn das von Hankel als Permanenz der formalen Gesetze bezeichnete Prinzip benutzt wird, das ich unabhängig von Hankel dahin formuliert habe: Für die neuen Glieder gelten die alten Gesetze. Ein Prinzip, das in jeder Vereinigung für die Aufnahme neuer Mitglieder gültig ist.

10. Wir sind jetzt in den Stand gesetzt a so zu trennen, daß der eine Bestandteil a ist, in dem 0 die Ergänzung wird und

$$0 + a = a + 0 = a.$$

Durch Einführung der 0 ist es auch möglich, die Zahlen räum-

lich zu versinnlichen auf der Zahlenlinie, wobei der Abstand vom Null- oder Anfangspunkt, die Länge der Strecke, ein Bild für die in der Zahl vereinigte Menge von Einheiten (Kardinalzahl) ist, für die Zahlengröße, um mit Weierstraß zu reden, und der Zahlenpunkt ein Bild für den Wert, d. h., die Stellung der Zahl in der Zahlenreihe.

11. Die drei verschiedenen Methoden: Abzählung des Zahlenintervalls, Rückwärtszählung, Probieren sind nicht zufällig gerade drei, sondern die erste schmiegt sich naturgemäß an die Vergleichung, die zweite an die Verminderung, die dritte an die Trennung.

12. Es ist nicht vorteilhaft sofort zur Einführung der negativen Zahlen zu schreiten, wenigstens nicht auf der ersten Stufe; trennen doch auch zeitlich etwa 600 Jahre die 0 und die negativen Zahlen, sondern man wird sehr gut tun, hier die Rechnung mit Aggegraten einzuschalten, d. h., Summen und Differenzen, in denen die einzelnen Glieder selbst wieder Summen und Differenzen sind, und damit zugleich die Klammerauflösungsregeln zu üben.

Unmittelbar aus der Auffassung der Subtraktion als Vergleichung hat man:

(2) $$(b \pm x) - (a \pm x) = (b - a),$$

wobei wir links die beiden Minuszeichen unterm + als Zeichen der Verminderung auffassen.

(3) $$(b \pm x) - a = (b - a) \pm x.$$

In Worten: Die Reihenfolge der Operationen + und − ist ohne Einfluß auf das Resultat oder: Eine Zahl wird von einer Summe subtrahiert usw., und rückwärts gelesen: Eine Differenz wird addiert usw.

(4) $$b - (a \pm x) = (b - a) \mp x = b - a \mp x.$$

Eine Summe wird subtrahiert usw.

Die Formeln lassen sich auch räumlich auf der Zahlenstrecke veranschaulichen.

Wir fassen die Formeln 2, 3, 4 und II 1, 2 zusammen in die Klammerregeln:

In einem Aggregat kann eine Plusklammer ohne weiteres weggelassen werden, eine Minusklammer nach Umkehrung der Operationszeichen in der Klammer.

Es ist nötig, ehe man die Regel gibt, „die Minuszeichen, welche auf ein Glied Einfluß haben, zu zählen und bei gerader Zahl das Plus-, bei ungerader das Minuszeichen zu setzen“, die Schüler durch Konstruktion zu üben; z. B. $(a - b) + 2c - (c - (b - a))$ ist ein dreigliedriges Aggregat:

a) Glied $(a - b)$ Differenz,
b) Glied $2c$ zusammengezogen aus $c + c$,
c) Glied $c - (b - a)$ Differenz, deren Subtrahend eine Differenz ist.

(1) $$(a - b) + 2c - c + (b - a)$$

(2) $$a - b + c + b - a$$

(3) $$c + a - b + b - a = c$$

Es sind für die Einübung des Rechnens mit Aggregaten immerhin 8 Stunden nötig, die für den Lehrer ermüdend sind, bei einer Klasse über 25 Schüler sogar 10 Stunden, und man muß öfter repetieren.

IV. Abschnitt.

Die Einführung der negativen (besser: entgegengesetzten) Zahlen.

Man wird gut tun in der Untertertia sofort zur Multiplikation überzugehen und die Einführung der entgegengesetzten Zahlen auf Obertertia zu verschieben.

Vergleicht man die Subtraktion mit der Addition, so sieht man, daß die Addition stets ausführbar ist, weil die Zahlenreihe kein Ende hat. Die Subtraktion verlangt, daß der Subtrahend nicht größer sei als der Minuend und das auch erst nach Einführung der 0, der Grund liegt darin, daß die Zahlenreihe einen bestimmten Anfang 1 bzw. 0 hat. Man sieht sofort, daß diese Beschränkung für die Subtraktion als Vergleichung wegfällt, nur muß man bei 8—9 bemerken, daß der Minuend verglichen mit dem Subtrahend ein Glied weniger hat, und dies im Resultat kenntlich machen etwa durch 1′. Ich bemerke, daß, als ich den Strich einführte, ich nicht wußte, daß die Inder bei der Schaffung der negativen Zahlen sich fast genau derselben Bezeichnung bedient haben.

Indem wir den Subtrahendenkomplex festhalten und jeden andern mit diesem vergleichen, wird der feste Komplex zum Normalkomplex. Solche Normalkomplexe sind z. B. die Normalhöhe des Rheines am Pegel, die Höhe des Meeresspiegels, die Höhe des Pferdes bis zum Wiederrist, das Militärmaß, der Normalgehalt, die normale Temperatur usw.

Man erhält beim Vergleichen zwei Zahlenreihen, die gestrichene als Ausdruck, bzw. Abstufungen der Beziehung „weniger“ (daher auch das Minuszeichen), und die alten Anzahlen, denen man als Abstufungen der Beziehung „mehr“ das Pluszeichen vorsetzte. Insofern man in einer Zahl a' oder auch in $+a$ die reine Anzahl hervorheben will, schließt man sie nach Weierstraß in zwei kurze, senkrechte Striche ein; gelesen absoluter Betrag, z. B. ist $|7'| = 7$ und $|+7| = 7$.

Die 0 nimmt eine besondere Stellung ein als Ausdruck der Beziehung gleich zum Normalkomplex; aber dieser Komplex wird wie alles Wiederkehrende im Bewußtsein zu nichts, zur wirklichen 0

herabgedrückt; denken Sie nur an die Signaltaub- und -blindheit, an die völlige Gleichgültigkeit, mit der jeder sein Gehalt empfängt und die Freude über Zulage bzw. unerwarteten Gewinn, und hier haben Sie die vierte Bedeutung des so komplizierten Begriffs 0; 0 als das Normale.

Man kann nun beide Zahlenreihen zusammenfassen zu einer, die jetzt weder Anfang noch Ende hat, und indem man den Normalkomplex durch den Nullpunkt versinnlicht, bildet sich diese Doppelreihe auf einer Zahlenlinie ab, die man meist gerade wählt, wobei der Gegensatz in der Beziehung zum Normalen durch den Gegensatz in der Richtung seinen Ausdruck findet. Sie sehen in dieser Herleitung auch die innere Berechtigung $1'$ als um 1 weniger denn 0 anzusehen und um $1'$ mehr als $2'$.

Es wird jetzt möglich auch Verminderung und Trennung zur Hälfte durchzuführen, wenn $a > b$ ist. Wollen wir $5 - 8$ bilden, so fassen wir das so auf, daß wir von $0 + 5$ (0 als Normales gedacht) 8 wegnehmen, wobei $0 - 3$, d. h. $3'$ übrig bleibt, und wir können die Rechnung wie früher ausführen, indem wir von 5 aus um 8 rückwärts zählen. Ebenso sind wir imstande 5 so zu trennen, daß der zweite Bestandteil 8 ist, indem wir 5 ansehen als $0 + 5$ und zerlegen in $0 - 3$, d. h. $3'$ und von $3'$ aus um 8 vorwärts zählen.

Wollen wir aber Verminderung und Trennung uneingeschränkt ausführen, so können wir das nur, wenn wir zu der Einheit $e = 1$ eine ihr entgegengesetzte $e' = 1'$ denken können, so daß sich beide bei der Vereinigung gegenseitig aufheben. Solche entgegengesetzte Größen sind z. B. Schulden und Vermögen, Bewegung nach rechts und links, dito Drehung, Zug und Druck, Nord- und Südmagnetismus, Harz- und Glaselektrizität, aber auch die Subtraktion selbst läßt sich als entgegengesetzte Addition, die Division als entgegengesetzte Multiplikation auffassen, und aus dieser Anschauung heraus erklärte Chuquet, *le père d'Algèbre*, in seiner *triparty* von 1482 $1/a^n = a^{-n}$. Jetzt wird der Normalkomplex zur wirklichen Null und $0 - 3' = 3 + 3' - 3' = 3$, d. h., wir führen Verminderung und Trennung vollständig durch, wenn wir die Addition von a' durch die Subtraktion von a und die Subtraktion von a' durch die Addition von a ersetzen und umgekehrt.

Der rein formale Standpunkt umgeht scheinbar alle diese Schwierigkeiten, wir schieben Zählmarken, wie die Null auch u. a. eine war, der Reihe nach vor die 0, also: $1'$, $2'$, $3'$ und rechnen mit diesen Zahlenmarken nach dem wiederholt ausgesprochenen Prinzip, wonach z. B. $8 + 3' = 3' + 8 = 5$ ist und $3 - 8'$, da es, wenn $8'$ als Augendus angesehen wird, 11 ist, auch 11 ist, wenn $8'$ als Addendus angesehen werden soll. Es kommt das, wie Sie sehen, ganz auf das eben Ausgeführte heraus: Die Subtraktion von a' durch Addition von a und

die Addition von a' durch Subtraktion von a zu ersetzen und umgekehrt.

Wir erzwingen so die formale Aufhebung aller Beschränkungen, sind dafür gezwungen, die Definitionen von Addition und Subtraktion zu ändern, so zwar daß beide Operationen in eine einzige, die algebraische Addition, verschmelzen. Die Definitionen lauten a und b, addieren heißt in der Zahlenreihe von a aus in der Zahlenreihe die $|b|$ folgenden Glieder der Reihe nach vorwärts oder rückwärts abzählen, je nachdem b mit $|b|$ übereinstimmt oder nicht, $|0| = 0$ gesetzt, und analog, mit Vertauschung von vorwärts und rückwärts, ist die Definition der Subtraktion.

Dabei ist sonderbar, daß die Subtraktion die negativen Zahlen schafft, und diese die Subtraktion als selbständige Rechnungsart aufheben.

Meine Herren, so leicht scheinbar dieser rein formale Standpunkt ist, so außerordentlich gerechtfertigt er vom rein arithmetischen wissenschaftlichen Standpunkt ist, der Schüler hat immer das Gefühl dabei, daß etwas faul im Staate Dänemark. Und das Gefühl täuscht ihn auch nicht, denn sind die negativen Zahlen wirklich Zahlen, so muß unter sie etwas Abzählbares fallen, wie eben Mangel gegen Überschuß, Schulden gegen Vermögen; Übergang nach links im Gegensatz zu rechts usw., sonst sind sie nichts als inaktive Mitglieder der Zahlenkorporation.

Die Operationen 2. Stufe.

V. Abschnitt.

Die Multiplikation.

1. Wenn es sich um die Abzählung großer Mengen handelt, wie Früchte, große Entfernungen und Flächen, Fabrikate aller Arten, Menschenmassen usw., reicht die Abkürzung, welche uns die Addition gewährt, nicht aus. Man bedenke, daß eine einzige einigermaßen große Fabrik in Birmingham täglich eine Million Stahlfedern produziert und daß jede einzelne gezählt werden muß. Wir schaffen Einrichtungen, um den Zählprozeß immer nach der gleichen Menge zu unterbrechen, zu Deutsch: wir machen Gebrauch von der Grunderkenntnis: Einheit und Vielheit sind subjektiv und fassen eine beliebige Anzahl Einheiten zusammen zu einer neuen Einheit, einer Übereinheit. Wir treffen Einrichtungen, z. B. Fässer, Kisten, Bänke usw., die uns diese Zusammenfassungen erleichtern, soweit sie uns nicht durch die Natur, z. B. unsere Hände, gegeben sind. Eine solche natürliche Übereinheit ist die 10, die daher bei den meisten

Völkern eine Übereinheit gebildet hat, ebenso die 6, da, wenn die fünf Finger fertig sind, auch die geschlossene Hand benutzt werden kann, und das Dutzend; das Groß, eigentlich Großdutzend, ursprünglich 120, nicht 140.[1])

2. Diese Summen von gleichen Summanden sind tatsächlich neue Zahlenreihen, denen eine Übereinheit zugrunde liegt; der Großverkehr oder auch nur der größere Verkehr ist ohne diese Neubildungen unmöglich, Kastanien und Nüsse werden zu 5, d. h., nach Handvoll, Zigarren nach Mille, Nähnadeln in Briefen zu 100, Nähfaden nach Sternen, Bindfaden nach Knäueln usw. abgezählt. Als infolge von Livingstone's und Stanley's Reisen in Zansibar sich größerer Verkehr einstellte, erfanden die Suaheli sofort die Multiplikation, in der sie eine Reihe Kaurimuscheln zu einem Stück Baumwollzeug und dieses wieder zu einer Rolle Messingdraht zusammenfaßten. Die Operationen zweiter Stufe sind die eigentlichen Kulturträger.

3. Konnte man sich in Sexta begnügen, die Multiplikation zu definieren als wiederholte Setzung desselben Summanden, so muß sie jetzt, wo sie als selbständige Operation auftritt, schärfer erfaßt werden. Wir können jede Zahl a der Zahlenreihe als Übereinheit auffassen und mit ihr als Grundzahl die Zahlenreihe wiederholen, sehen aber zunächst von 0 und gestrichenen Zahlen ab. Man sieht sofort, daß die Mächtigkeit der natürlichen Zahlenreihe und der a-Reihe: $a \cdot 1$; $a \cdot 2$; $a \cdot 3 \cdots$ usw. dieselbe ist.

Wir definieren das Produkt ax, gelesen: a x-mal als Zahl Nr. x der Überreihe Nr. a, oder kürzer: als die Zahl x erzählt aus der Übereinheit a. Die Operation, welche wir Multiplikation nennen, besteht darin, diese in der Überreihe a erzählte Zahl x in die Haupteinheit einzureihen, sie ist nötig, denn wenn der Großverkehr nach Übereinheiten zählt, zählt der Kleinverkehr nach Haupteinheiten; der Käufer muß wissen, daß 20 Handvoll 100 sind, der Konsument raucht die Zigarren einzeln, usw. Wir nennen diese Einreihung: Das Produkt ausrechnen oder auswerten, und bezeichnen die gefundene Zahl als den Wert des Produkts und meistens einfach als Produkt schlechtweg.

Die Übereinheit a heißt meistens Multiplikand, der Zähler x Multiplikator, beide gemeinsam Faktoren.

4. Aus der Definition folgt sofort, daß n angesehen werden kann als $1 \cdot n$ und $n \cdot 1$ und im besondern, daß $1 \times 1 = 1$ ist. Der Faktor 1 kann also bei der Multiplikation gerade so gut weggelassen

---

1) Kewitsch, Zeitschrift für Assyriologie; ich bin nicht der Ansicht, daß das Babylonische bzw. Sumerische Sexagesimalsystem diesen Ursprung hat, sondern daß es eine künstliche, von einer der großen Priesterhochschulen ausgehende Schöpfung ist.

und hinzugefügt werden wie die 0 bei der Addition, und daher rührt die unausrottbare Gewohnheit der Schüler 0 und 1 zu verwechseln. Hunderte von Malen sagen Schüler: $a : a = 0$ und $0 \cdot a = a$!

5. Das Zeichen der Multiplikation bei Zahlen ist das $\times$, von Oughtred, bzw. Rudolph v. Jauer eingeführt, oder der von Leibniz herrührende Punkt. Bei Buchstaben lassen wir das Zeichen ganz weg, schreiben und lesen ab, und hierin kommt deutlich die beständig steigende Bedeutung der Multiplikation zum Ausdruck, anfänglich ist die Addition die Hauptoperation und wird als selbstverständlich angenommen, wenn kein Zeichen vorliegt, z. B. noch bei Diophant.

6. Da an die Anzahl n ist, so folgt direkt daß $a(n+1) = an + a$, wodurch wir sukzessive die Überreihe a sehr schnell auswerten können, ebenso unmittelbar haben wir

$$a(n + p) = an + ap. \tag{1}$$

7. Legt man in einer Kiste, deren Inhalt die Übereinheit a darstellt, etwa ein, zwei oder mehr Fächer ein, bzw. stützt man sich auf den Satz von der Vertauschung der Reihenfolge der Summanden, so erhalten wir das distributive Gesetz der Multiplikation.

$$(\alpha + \beta + \gamma + \cdots)n = \alpha n + \beta n + \gamma n + \cdots. \tag{2}$$

Beide Formeln zusammen

$$(\alpha + \beta + \gamma + \cdots)(p + q + r + \cdots) = \alpha p + \alpha q + \alpha r + \cdots + \\ + \beta p + \beta q + \beta r + \cdots +. \tag{3}$$

In Worten: Eine Summe wird mit einer Summe multipliziert, indem man jeden Summanden der einen Summe der Reihe nach mit jedem der andern multipliziert und die Teilprodukte addiert. Aus der Definition des Produkts folgt unmittelbar, daß wenn $x > y$ auch $ax > ay$ und aus Formel (2) auch $xa > ya$.

8. Diese Sätze zeigen uns, daß die Produkte der Einer mit den Einern fortwährend gebraucht werden und wir lernen sie als kleines 1×1 auswendig, bzw. verzeichnen sie tabellarisch, und diese Tafel in ihrer bekannten, übrigens fehlerhaften Einrichtung (es fehlen die Vorschriften und die Überschriften) ist allmählig immer weiter fortgesetzt worden.

Die Franzosen nennen das 1×1: *table de Pythagore* infolge einer Verwechselung mit dem Rechentisch der Römer, dem Abacus.

Bei Nikomachus von Gerasa ist es bis $20 \cdot 20$; Petrus de Dacia, der Rektor der Sorbonne, um 1326, hat es bis $50 \cdot 50$, heute haben wir es in Form von Rechenmaschinen bis Million mal Million, aber Hilprecht hat bei den Ausgrabungen in Nippur schon aus Sargonischer Zeit, also aus dem 4. Jahrtausend v. Chr. 1×1-Tafeln der Babylonier bis 1350 gefunden.

9. Das 1×1 zeigt uns, daß die Zahlen z. B der 5. Überreihe, der 5. Horizontalreihe, mit den Zahlen der 5. Vertikalreihe, deren gemeinsamer Zähler 5 ist, der Reihe nach übereinstimmen; wir erhalten experimentell den Satz:

$$an = na, \tag{4}$$

das kommutative Gesetz der Multiplikation.

Gewöhnlich wird dieser Satz durch Raumanschauung bewiesen, wobei die Analogie des Produkts mit der Flächeninhaltsmaßzahl des Rechtecks hervortritt. Ich habe aber dem Satz Platos bzw. Aristoteles' folgend, daß man nichts Heterogenes zur Begründung heranziehen soll, fast solange ich Lehrer bin, jedenfalls seit 1873, den rein arithmetischen Beweis gegeben, den Sie in meinen Elementen der Arithmetik von 1884 gedruckt finden. Da $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ ist, so ist:

$$a2 = a \cdot 1 + a1 = 1 \cdot a + 1 \cdot a = a2,$$

oder allgemein, wenn $an = na$, so ist:

$$a(n+1) = an + a \cdot 1 = na + 1a = (n+1)a.$$

Der Satz ist also durch vollständige Induktion bewiesen.

10. Ich gebe noch einen zweiten Beweis, der für den Schüler anschaulicher ist; am besten macht man ihn an Beispielen klar:

$$\begin{array}{rcl|ccccc} & 1 \quad 2 & 8 & 8 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 8 \cdot 13 = & 8 + 8 + \cdots + & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8. \end{array}$$

Teilt man die fünf letzten 8 der Reihe nach unter die ersten 8 auf, so schwellen sie, sich immer um eins vermehrend, um 5 an und geben zuletzt $13 \cdot 8$. Aus dem kommutativen Gesetz rechtfertigt sich die gemeinsame Benennung Faktoren für beide Zahlen des Produkts.

11. (ab) kann mit c multipliziert werden und ist dann zu deuten als $ab + ab + \cdots + ab$. Durch Hineingehen in den Raum — das Rechteck wird durch einen Balken ersetzt — sieht man, daß auch hier die Reihenfolge und die Zusammenfassung der drei Zahlen beliebig; wir erhalten das assoziative Gesetz:

$$(ab)c = a(bc). \tag{5}$$

Der Beweis kann rein arithmetisch wieder durch den Schluß n auf $n+1$ gegeben werden, da $(a1)c = a \cdot (c \cdot 1)$ ist.

Man kann auch den 2. Beweis benutzen, um z. B. zu zeigen, daß $(5 \cdot 7) \cdot 9 = (5 \cdot 9)7$ ist. Aus beiden Gesetzen folgt wie in der Addition die Gültigkeit des Vertauschungsgesetzes für beliebig viele Faktoren.

12. Für die Cantorschen Ordnungstypen ist das kommutative Gesetz ungültig, während das assoziative bestehen bleibt. $\omega 3$ ist vom Typus $\omega + \omega + \omega$, aber 3ω ist nichts anderes als ω, dagegen ist:

$$(\omega \cdot 5)3 = \omega \cdot 15 = (\omega \cdot 3)5.$$

13. Gehen wir in der Überreihe a vom n-Glied aus um ν Glieder rückwärts, d. h. bilden wir $an - a\nu$, so zählen wir uns bis zu $n - \nu$ Gliedern der Reihe, also:

$$a(n - \nu) = an - a\nu \tag{6}$$

und:

$$(a - b)q = q(a - b) = qa - qb = aq - bq.$$

Nehmen wir $(a - b)(c - d)$, so erhalten wir

$$ac - bc - d(a - b) = ac - bc - da + db.$$

Wir können die sämtlichen Regeln zusammenfassen in die Regel: Ein Aggregat wird mit einem Aggregat multipliziert, indem man jedes Glied des einen mit jedem Glied des andern multipliziert und dem Produkt gleichartiger Glieder das Pluszeichen und dem ungleichartiger das Minuszeichen gibt.

14. Da wir unsere Zahlenreihe nach Abschnitten von je 10, $10 \cdot 10$, $10 \cdot 10 \cdot 10$ usw., den Dezimalstufen, ordnen, haben die Produkte gleicher Faktoren ein erhöhtes Interesse, wir schreiben für $a_{(1)} \cdot a_{(2)} \cdots a_{(n)}$ kurz a^n, lesen a zur n^{ten} oder a hoch n und nennen ein solches Produkt eine Potenz, die Ordnungszahl n den Exponent, a die Grundzahl, Basis, Dignand, und begründen, daß $a^r a^s = a^{r+s}$ ist. Das Wort Potenz stammt aus der Algebra des Bombelli 1572 und ist eine wörtliche Übersetzung von *dynamis*, das Diophant für die 2. Potenz brauchte, Dignand aus dem *general Trattato* des durch seinen Streit mit Cardanus bekannten Tartaglia und daher nannte man die Potenzen früher oft Dignitäten; Exponent aus der *Arithmetica integra* Michael Stifel's 1544, die jetzige Schreibweise aus 1634, doch schrieb schon Chuquet 3^5 für $3x^5$, bei dem sich auch zuerst negative Potenzen finden.

15. Über die Multiplikationen mit 10, 100 usw. ist noch zu bemerken, daß z. B.

$$70 \cdot 5 = 10 \cdot 7 \cdot 5 = 10(35) = 350$$

und z. B.

$$800 \cdot 35 = 100 \cdot 8 \cdot 35 = 100 \cdot 280 = 28\,000, \text{ usw.}$$

Man tut gut, von vorn herein den Begriff der Ordnungszahl einzuführen, welche mit dem Exponent von 10, mit dem die Ziffer multipliziert ist, übereinstimmt, und den Einern die Ordnungszahl 0 und den Zehnern 1 zuzuordnen.

16. Unsern Algorithmus der Multiplikation hat Adam Riese, der wackere Salzschreiber von Annaberg, der einzige Mathematiker, welcher jemals populär geworden ist, in bekannter Weise gestaltet. Bei Buchstabenausdrücken haben wir die Gewohnheit nach fallenden Potenzen zu ordnen und von links nach rechts zu rechnen; es ist

aber auf die Willkür des Algorithmus aufmerksam zu machen. Algorythmus ist ursprünglich eine Entstellung des Namens Alchwarizmi, des Beinamens von Muhamed ben Musa Alchwarizmi, d. h. des Chwaritzers, und stammt aus der lateinischen Übersetzung seiner Algebra durch Atelhart von Bath 1120, welche mit den Worten beginnt: *Ita loquitur Algorithmus.*

17. Wegen ihrer fortgesetzten Anwendung verlangen die Formeln:

$$(a+b)^2;\ (a-b)^2;\ (a+b)\cdot(a-b)$$

eine ganz besondere Rücksicht. Man kann für jede einzelne eine Stunde verbrauchen, muß sie in häuslichen Arbeiten üben und lehrt die Formeln auch praktisch zum Kopfrechnen verwenden, z. B.

$$87\cdot 93 = 8100 - 9 = 8091,$$

dann für die Bildung der Quadrate der zweistelligen Zahlen. Man übe auch umgekehrt die Zerlegung in Faktoren, z. B.

$$81a^4 - 16b^4;\ a^8 - b^8,\ \text{usw.}$$

18. Die Multiplikation mit 0 und den gestrichenen Zahlen ist dadurch begründet, daß man mit diesen Zahlen, da sie nun einmal in der Zahlenreihe stehen, auch zu rechnen versuchen muß. Zunächst folgt ohne Mühe, daß $0\cdot n = 0$ ist und $a'\cdot n = (an)'$ ist. Definieren wir ab als die Zahl, die in der a-Reihe die Stelle einnimmt, welche b in der Hauptreihe hat, so folgt zunächst, daß $a0 + a1 = a$ sein muß, demnach ist $a\cdot 0 = 0$, wie es $0\cdot a$ auch ist und $a3'$ die dritte Zahl links von $a0$, also die Zahl, die mit $a\cdot 3$ addiert die 0 der a-Reihe gibt, also $a'\cdot 3$ ist, d. h. also, der Strich läßt sich vom Multiplikand auf den Multiplikator übertragen. Ganz analog muß $a'3'$ die Zahl sein, welche mit $a'3$ zusammen $a'\cdot 0 = 0$ ist, d. h. $a'\cdot 3'$ ist $a\cdot 3$ und hier ist das „minus $\times$ minus ist plus“ erklärt.

19. Es ist hier auch die Stelle aufmerksam zu machen, daß $(a')' = a$ gesetzt werden muß, insofern wir der Zahl p diejenige entgegensetzen, welche, zu p addiert, 0 gibt, und dann ist der Nachweis, daß $a'b' = ab$ ist, schon in dem Satz $ab' = a'b$ geliefert.

20. Man könnte diesen Satz auch psychologisch zu begründen versuchen, insofern man die durch b' gesetzte Tätigkeit als die entgegengesetzte der durch b gesetzten ansehen könnte. So konnten wir $a \pm b' = a \mp b$ ansehen. Man könnte z. B. sagen, für eine Kasse bedeute $a\cdot 3$ die dreimalige Einnahme von a und $a3'$ die dreimalige Ausgabe, aber die Schüler kennen bereits die Division und würden dann mit mindestens demselben Recht $a\cdot 3'$ als $a : 3$ auffassen wollen.

VI. Abschnitt.

Division.

Wie die Multiplikation aus der fortgesetzten Addition gleicher Summanden entspringt, so ist die Division aus der Subtraktion.

1. Die Subtraktion wurzelt in unserm Vermögen, die Einheit, welche wir in die Vielheit gelegt haben, wieder aufzuheben. Wird verlangt, daß die Teile gleich sind, so haben wir die Division. Die Division ist daher ganz ebenso berechtigt wie die Multiplikation, ja, sie wird durch die Natur gesetzt, da das Erbe, der Raub, das Brot geteilt werden müssen. Es kann ein Araberscheik, der nie etwas von Arithmetik gehört, seine Herde gleichmäßig unter seine Söhne teilen, indem er jedem jedesmal ein Tier gibt. Der Dreiteilung der Subtraktion als Vergleichung, Verminderung, Ergänzung entspricht auch eine dreifache Auffassung der Division als fortgesetzte Vergleichung dadurch, daß man den Komplex B in Komplexe a zerlegt, um a vermindert und als Summe vom gleichen Summanden a auffaßt. Es war von diesem Standpunkte aus gar nicht so unlogisch, die Zweiteilung wie die Verdoppelung als selbständige Rechnungsart: *mediatio, duplicatio* aufzufassen, z. B. noch bei Cutbert Tonstall.

2. Rein mathematisch heißt ihr Problem: einer gegebenen Zahl, z genannt, die Form einer Summe von gleichen Summanden geben, dabei kann entweder die Anzahl der Summanden, also der Multiplikator, oder der wiederkehrende Wert, die Übereinheit, gegeben sein.

Ist der Käufer gezwungen zu multiplizieren, so ist der Verkäufer gezwungen zu dividieren.

Anders ausgedrückt: es handelt sich darum, einer in der Hauptreihe gegebenen Zahl einen bestimmten Platz anzuweisen und die dazu gehörige Übereinheit zu bestimmen oder ihr die Überreihe vorzuschreiben und den Platz zu suchen. . Fordert z. B. jemand ein Schock Nüsse, so muß der Verkäufer wissen, daß die 60 der Hauptreihe die 12 in der 5. Reihe ist. Müssen fünf Leute z. B. für die Beförderung auf den Aschenkegel des Vesuv den Tribut von 10 Lire entrichten, so müssen sie wissen, daß 10 die 5. Zahl der Überreihe 2 ist. Ist der Multiplikator gegeben, so heißt die Division Teilung, ihr Resultat Teil; ist der Multiplikand gegeben, so heißt die Division Messung oder Aufsuchung des Verhältnisses, ihr Resultat Maßzahl oder Verhältnis.

3. Wenn $xa = ay$ ist, so ist Formel V, 4 $ya = xa$ und nach V, 3 $y = x$. Es kann daher jede der beiden Operationen die andere ersetzen und beide fließen in eine, Division genannt, zusammen. Man braucht die Multiplikation nicht um diese Zusammengehörigkeit der beiden begrifflich so scharf geschiedenen Operationen, Teilung

und Messung, einzusehen. Auch der Araber, der 65 Pferde unter seine 5 Söhne teilen wollte, würde bemerken, daß jeder so oft 1 Pferd erhält, als sich 5 Pferde von 65 wegnehmen lassen.

Wir definieren: Eine Zahl a, Dividendus genannt, durch eine Zahl b, Divisor genannt, dividieren heißt eine Zahl c, Quotient genannt, bestimmen, welche, mit b multipliziert, a gibt. Es muß aber bei der scharfen begrifflichen Verschiedenheit dem Schüler eingeübt werden, daß, wenn b Übereinheit ist, die Operation Messung ist und im anderen Falle Teilung.

4. Die Division als Messung gibt Gelegenheit, auf die Maße einzugehen. Die Maße und das Messen bilden einen Gegenstand, der von Sexta bis Prima immer wieder und immer vollständiger zu üben ist. In die Fülle von Eindrücken, welche die Seele überfluten, bringt der Trieb zum Vergleichen Ordnung und Übersicht dadurch, daß wir diese Fülle in Maß und Zahl fassen, wobei wir alles Quantitative in die Vorstellung des Maßes legen. Die Schaffung des Maßes für irgend ein Vorstellungsgebiet ist entscheidend für die Anwendbarkeit der Mathematik auf dieses Gebiet, und somit liegt in der Schöpfung der Maße eine Hauptaufgabe und ein Haupterfolg der Mathematik, wodurch sie sich ein Gebiet nach dem andern erobert. Man denke an das Krümmungsmaß für Kurven und Flächen, an das Maß der Arbeit und Energie, an das Maß für den Zufall selbst.

5. Die Erkenntnis der Maße bildet darum mit Recht einen integrierenden Teil des mathematischen Unterrichts, schon in Sexta sollen die einfachsten Maße dem Kinde anschaulich vorgeführt werden: das Meter, die Mark, der Liter, das Kilo. Aber gerade dieses Gebiet liegt sehr im Argen, weil in der Sexta das Reduzieren und Resolvieren mit zu viel Maßeinheiten betrieben wird und in der folgenden Klasse selten oder gar nicht mehr die Rede davon zu sein pflegt. Man nehme nur das Zeitmaß oder das Kilo. Ich möchte wohl wissen, in wie viel Sexten Deutschlands dem Schüler wirklich etwas vorgewogen wird. Es muß zunächst dem Schüler klar gemacht werden, was ein Gewicht ist, dadurch daß man ihm schwere Gegenstände mit der Hand am Fallen hindern läßt, dann auf demselben Wege, was gleiche Gewichte sind, dann genügt es zunächst, wenn man ihm sagt, daß das Kilo der Druck ist, den ein Liter Wasser auf die Unterstützungsfläche ausübt. Dies ist in Quinta und Quarta zu wiederholen; in Tertia, auch wohl schon in Quarta, kann man hinzufügen, daß das Wasser chemisch rein sein und die Temperatur von 4 Grad haben muß; in Sekunda kann man den Einfluß des Luftdrucks hinzunehmen, aber erst in Prima wird mit dem Einfluß der geographischen Breite der Begriff in seiner vollen Schärfe und seiner ganzen Veränderlichkeit klar werden. Die Primaner amüsieren sich sehr bei der Vorstellung, daß sie schwerer ins Gewicht fallen als ihre Herren

Väter, weil die Erde inzwischen durch die Meteore an Masse gewonnen hat. Nunmehr definiert man das Kilogramm als konventionelle Masse. Und ganz ebenso oder noch verwickelter ist das Zeitmaß, es ist kein großer Bruchteil Mitteleuropäer, der mit seiner Zeit Bescheid weiß. Über das Längenmaß, den Platin-Iridiumstab im Reichseichamt zu Berlin, kann ich auf einen Aufsatz des Herrn Böttcher im 10. Heft der Frickeschen Lehrgänge und Lehrproben verweisen.

6. Die Division ist gleichbedeutend mit der Auflösung der Gleichung:

$$xa = c, \text{ bzw. } ax = c.$$

Die Auflösung geschieht analog wie die von

$$x + a = c$$

durch Experimentieren, unter Benutzung des Umstandes, daß der von dem jedesmal gewählten Werte des x abhängige Ausdruck ax mit wachsendem x beständig wächst, respektive abnimmt, je nachdem $a > 0$ oder $a < 0$ ist. Der Fall $a = 0$ bedarf einer besonderen Behandlung. Sie sehen, wie hier der Begriff der Funktion schon merklich deutlicher hervortritt.

7. Soll z. B. $x7 = 91$ sein, so zeigt ein Versuch, daß $10 < x$ und ein zweiter, daß $20 > x$, und wir wissen zugleich, daß alle Zahlen < 10 zu klein sind, dem untern Bereich angehören und daß alle Zahlen > 20 dem obern Bereich angehören. Denn die Operation setzt zugleich eine Teilung der Zahlen, einen Schnitt, um mit Dedekind zu reden. Ein weiterer Fortschritt liegt darin, daß wir $x = 10 + x'$ setzen, wobei wir wissen, daß $0 < x' < 10$ ist, dann ist $7x' = 21$, $x' = 3$.

Das Verfahren besteht also allgemein darin, daß x in Grenzen einzuschließen und die Grenzen enger und enger zu ziehen, wodurch zugleich die Frage, ob die Division überhaupt ausführbar ist, auch entschieden ist.

8. Unser heutiges Verfahren beruht vor allem auf der Einmaleinstabelle. Wenn wir c durch a dividieren sollen, so durchmustern wir die a^{te} Horizontal- bzw. Vertikalreihe, bis wir darin c finden. Der Index der betreffenden Vertikal- bzw. Horizontalreihe ist dann der Quotient; dieses Durchmustern wäre unter Umständen, z. B. wenn wir 864 192 durch 7 teilen sollten, kein Vergnügen; aber wir übersehen in jeder Reihe des Einmaleins die Dezimalenstufenzahlen sofort, da wir sie durch Anhängen der entsprechenden Nullen an die Grundzahl der Reihe bilden. — Der Algorithmus unserer Division ist ein Grenzverfahren, gestützt einerseits auf die Erkenntnis, daß die Funktion ax mit wachsendem x monoton wächst und andererseits auf unserer genauen Kenntnis der Zahlenreihe. Es wird hier schon klar,

daß die Einmaleinstabelle nichts anderes ist als eine Übersicht über den Verlauf der Funktionen zweier Variablen $x \cdot y$ und der formale Charakter des Rechnens wird hier auch sehr deutlich.

9. Gestatten Sie mir einige methodische Bemerkungen. Das Verständnis des Algorithmus der Division ist noch für Tertianer schwierig, aber es wird bereits in Oktava und Septima geübt, und die Folge davon ist, daß von früh an sich beim Knaben die Vorstellung ausbildet, die im weiteren Verlauf des mathematischen Unterrichts sich dann mehr und mehr befestigt: das Zeug verstehst du doch nicht. — Es wäre an der Zeit, daß die Division auf der Anfangsstufe geübt würde wie bei den Ägyptern und Griechen: soll 24 durch 8 geteilt werden, so sagt der Ägypter:

$$8 \cdot 1 = 8, \quad 8 \cdot 2 = 16, \quad 8 \cdot 3 = 24,$$

also:

$$8 + 8 + 8 = 24,$$

also ist einerseits 8 dreimal in 24 enthalten und andererseits 8 der dritte Teil von 24.

Ganz allmählich muß zu größeren Zahlen übergegangen und tunlichst die Anschauung zu Hilfe genommen werden, mit Haufen von Bohnen, Marken usw. Man hüte sich, das Verständnis des Algorithmus erzwingen zu wollen.

Eins aber ist von früh ab zu betonen: die Probe wird immer ausgeführt.

10. Da die Multiplikationstabelle unvollständig ist, so kann für die Division größerer Dividenden der Satz benutzt werden:

$$(x_1 \cdot a + x_2 \cdot a + x_3 \cdot a + \cdots) : a = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots)$$

und wir haben ebenso:

$$(x_1 a - x_2 a + x_3 a - \cdots) : a = (x_1 - x_2 + x_3 \cdots),$$

also: ein Aggregat wird durch eine Zahl dividiert, indem man jede Zahl einzeln dividiert.

11. Hat der Divisor selbst Aggregatform, so wird hervorgehoben, daß er als eine Zahl aufzufassen ist und das Verfahren wie bei Zahlen darauf beruht, den Dividenden in ein Aggregat von Vielfachen des Divisors zu zerlegen, wobei wie bei Zahlen nach fallenden Potenzen geordnet wird.

Probebeispiel;

$$(6x^4 + 19x^3 + 47x^2 + 51x + 42) : (3x^2 + 5x + 7).$$

Divisionen durch Buchstabenaggregate übe man nicht vor Obertertia im Gymnasium wie in der Realschule. Es handelt sich hier im Grunde um die Entwicklung einer gebrochenen rationalen Funktion in eine Reihe, die nach fallenden Potenzen fortschreitet.

12. Da die Multiplikationstabelle zugleich als Divisionstabelle dient, so wird sie genauer untersucht. Zunächst ist die Mächtigkeit aller Reihen dieselbe; jede ist auf jeder andern abzählbar, und es gibt gerade so viel Zahlen, die Vielfache von 1000 sind, als Zahlen überhaupt, obwohl jene nur den tausendsten Teil dieser ausmachen. Aber zwischen den einzelnen Zahlen der Tabelle tritt ein tiefgreifender Unterschied auf. Die Zahl 1 erscheint nur einmal, 2, 3, 5, 7 usw. nur zweimal und nur am Rand, während z. B. 4 dreimal, die Zahl 6 viermal, 16 fünfmal, 12 sechsmal vorkommen usw. Die Zahlen, welche nur zweimal, also nur am Rande vorkommen, heißen Primzahlen, die welche öfter vorkommen, zusammengesetzte Zahlen. Die Zahl 1 bildet eine Klasse für sich. Die Primzahl p hat nur die Teiler 1 und p, während jede zusammengesetzte Zahl a außer 1 und a mindestens noch einen Teiler hat.

13. Jede endliche zusammengesetzte Zahl ist das Produkt einer endlichen Anzahl von Primzahlen; denn schon, wenn diese alle gleich 2 wären, so wäre $2^{10^r} > 1000^r$.

14. Ist p eine Primzahl und vergleicht man die a-Reihe mit der p-Reihe, so sind entweder alle Zahlen der a-Reihe in der p-Reihe enthalten, oder nur die Zahlen $a \cdot p$, $a(2p)$, $a(3p)$ usw. Das erstere verlangt, daß a selbst in der p-Reihe steht, also durch p teilbar ist. Ist dies nicht der Fall, und wäre $a \cdot b$ die erste in der p-Reihe enthaltene Zahl und $b < p$, so könnte man p zerlegen in $q \cdot p + r$, wo $r < b$ und > 0 ist, da b größer als 1 ist; also wäre ar, weil gleich $ap - abq$, ebenfalls durch b teilbar. Das heißt also, es gibt zwischen $a \cdot 1$ und $a \cdot p$ keine durch p teilbare Zahl. Ebenso wird bewiesen, daß zwischen ap und $a(2p)$ keine durch p teilbare Zahl liegt. Also:

a) ist weder a noch b durch die Primzahl p teilbar, so ist auch $a \cdot b$ nicht durch p teilbar;

b) ist ein Produkt ab durch b teilbar, so muß mindestens einer der Faktoren durch p teilbar sein;

c) jede Zahl läßt sich nur auf eine Weise in Primfaktoren zerlegen.

15. Die Menge der Primzahlen ist unendlich.

Beweis: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p + 1$ ist entweder selbst eine Primzahl oder durch eine Primzahl größer als p teilbar. (Satz und Beweis bei Euklid IX. 20.) Z. B. ist das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ um 1 vermehrt gleich $30031 = 59 \cdot 509$. Unter 9 Millionen sind 602567 Primzahlen nach Glaisher. Die höchste bekannte Primzahl ist $2^{61} - 1$. Sie ist neunzehnstellig.

Zwei zusammengesetzte Zahlen heißen teilerfremd (relativprim), wenn die Primfaktoren der a von denen der b sämtlich verschieden sind. Sind a und b teilerfremd c, so ist auch $a \cdot b$ teilerfremd c (Satz 1). Ist a teilerfremd c und hat ab mit c den Faktor d gemein,

so hat auch b mit c den Faktor d gemein (Satz 2). Sind die Glieder der Reihe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ den Gliedern der Reihe $c_1, c_2, \ldots, c_n$ teilerfremd, so ist jedes Produkt aus Gliedern der a-Reihe jedem Produkt aus Gliedern der c-Reihe teilerfremd. Insbesondere ist, wenn a teilerfremd c, auch a^n teilerfremd c^n, und wenn a^n teilerfremd c^n, so ist a teilerfremd c.

Sind a und b zwei beliebige Zahlen, so läßt sich durch Fortsetzung des in 14 angewandten Verfahrens ihr größter gemeinsamer Teiler finden, ohne daß man a und b in Primfaktoren zu zerlegen braucht. Dieser Algorithmus findet sich bei Euklid. Er ist die Grundlage unserer Zahlentheorie. Wenn a und b teilerfremd sind, so ist der Rest r_n, der dem Rest 0 voraufgeht, gleich 1, weil dann 1 der größte gemeinsame Teiler ist.

16. Ist der Divisor $a < 0$, so führen wir die Division durch die Formel $(a)(x) = (-(a)) \cdot (-(x))$ usw. auf den Fall, wo Divisor und Dividendus Anzahlen sind, zurück und setzen dies fortab voraus. Ist $a = 0$ und ist der Dividendus nicht 0, so findet sich in der Zahlenreihe kein Quotient. Ist c auch gleich 0, so ist jede Zahl Quotient und die Division unbestimmt. Da nun für 0 doch eine Ausnahme gemacht werden muß, so entschließt man sich, die Division durch 0 zu verbieten.

VII. Abschnitt.

Bruchrechnung.

1. Der Grund, weshalb die Division im allgemeinen nicht ausführbar ist, tritt in jedem einzelnen Beispiele zutage. Die 13 in der Siebenerreihe ist 91, die 14 ist 98. Es fehlen also immer sechs Zahlen zwischen je zweien der Siebenereihe, und man kann 6 gegen 1 wetten, daß eine beliebig aus der Zahlenreihe herausgegriffene Zahl nicht durch 7 teilbar ist. Je größer der Divisor, um so geringer wird die Anzahl der ausführbaren Divisionen. An passenden Beispielen wie Brot, Torte, Ackerland, Geld usw. wird dem Schüler klar gemacht, daß die Teilung unter Umständen durchgeführt werden muß, soll Zank und Streit vermieden werden. Das gleiche gilt für die Messung. Man exemplifiziere auf die Feldmessung, die Wägung, auf die Handwerker: Schneider, Schreiner, Zimmermann usw., und es zeigt sich, daß die ursprünglichen Maßeinheiten geteilt werden müssen, um jede Zahl als Vielheit jeder andern ansehen zu können. Der Begriff der Teileinheit (Untereinheit) wird jetzt auf das sorgfältigste klargemacht, er beruht auf dem Obersatz unserer ganzen Rechenkunst.

(Einheit und Vielheit sind subjektive Begriffe). Man mache außer den früheren Beispielen, wie Äpfel, Torte, Baum usw. auch auf den Kreis und seine vier Quadranten, die Stadt und ihre Kantone usw. aufmerksam und hebe hervor, daß mit dem Moment, wo der Großverkehr die Übereinheit schafft, die bisherige Einheit zur Unter- oder Teileinheit geworden ist.

2. Man definiere nun sofort den Bruch $\frac{a}{b}$ als Zahl a, erzählt aus b^{teln} oder aus der Teil- bzw. Untereinheit Nr. b, und beweise dann sofort den Hauptsatz, ja den einzigen Satz der Bruchrechnung:

$$a : b = \frac{a}{b},$$

der den Grund enthält, weshalb wir mit Brüchen rechnen und der es rechtfertigt, daß wir den Bruch anders schreiben als sprechen. Der Satz ist vom Standpunkt der Division und von dem des Bruches aus an Beispielen und allgemein, und immer wieder so anschaulich als möglich zu beweisen. Zuletzt zeige man mit Hilfe des Rechtecks von Punkten, deren jeder z. B. $\frac{1}{7}$ versinnlicht, daß

(1) $\qquad \frac{5}{7} \cdot 7 = \frac{35}{7} = \frac{7}{7} \cdot 5 = 5$ ist.

Dieser Hauptsatz, dessen Niederschlag die mechanische Regel $\frac{a}{b} \cdot b = a$ ist, gestattet, die Division mit b durch die Multiplikation mit $\frac{1}{b}$ zu ersetzen. Der Bruch, mit dem nach dem preußischen Lehrplan gerechnet werden soll, „wie mit konkreten Dingen“, erscheint nach der bisherigen Auffassung weder als eine benannte Zahl noch als eine abstrakte Zahl, sondern als ein drittes, als eine relative Zahl. Der Bruch $\frac{5}{8}$ ist eine 5 und die Zählung bezieht sich auf eine Einheit, die zu einer früheren Haupteinheit, die dem Rechner bekannt ist, die Relation besitzt, dßa ihrer 8 gleich jener Einheit sind. Dieser Standpunkt ist der einzige, bei dem sich die Schüler, bis zur Sekunda hin, etwas vorstellen und von dem aus sie die Bruchrechnung, und zwar ganz gut begreifen. Die 1 in $\frac{1}{n}$ ist für sie nicht die Zahl 1, sondern die Einheit. Die Qualität dieser Einheit schwindet freilich mehr und mehr aus dem Bewußtsein des Rechners; aber es bleibt ein Rest von Sinnlichkeit, der übrigens bei $\frac{1}{5} \cdot 7$ nicht wesentlich von der in $5 \cdot 7$ verschieden ist. Auch in diesem Ausdruck haben wir von der 5, die wir siebenmal zählen, eine sinnliche Vorstellung, und wäre es auch nur die von je fünf Zahlen der Zahlenreihe.

3. Die Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche macht keinerlei Schwierigkeit, so wenig wie die Multiplikation mit einer ganzen Zahl; bei der Division stoßen wir auf dieselben Schwierig-

keit, welche zur Einführung der Brüche führte. $\frac{5}{7}$ ist so wenig durch 3 teilbar, wie jede andere 5; wir müssen die Einheit $\frac{1}{7}$ zur Vielheit 3 machen, wodurch sich 5 in 15 bezogen auf die Einheit Siebenteldrittel verwandelt und so fort ad infinitum. Aber anschaulich an der Strecke und noch weit besser an der Kreisfläche zeigt man, daß der 3. Teil von einem Siebentel zugleich der 21. der Haupteinheit ist. Damit ist dann auch zugleich der Satz über das Erweitern der Brüche gewonnen: die Teileinheit einer Teileinheit ist eine einfache Teileinheit; $\frac{1}{a}$ dividiert durch b ist gleich $\frac{1}{ab}$ und also $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$, wie man nun exemplifiziert an Geld, Kommißbroten usw. Die Division eines Bruches ist jetzt ebenfalls durchführbar. Es ist aber sehr wesentlich, daß der Schüler einsieht, daß er, um $\frac{7}{5}$ durch 3 zu teilen, es in $\frac{15}{21}$ verwandelt und davon der 3. Teil gleich $\frac{5}{21}$ ist, wie er von jeder 15 gleich 5 ist.

4. Die Formel (2) setzt uns jetzt instand, beliebige Brüche zu vergleichen und sie zu addieren und zu subtrahieren. Dabei ergeben sich, geknüpft an die Formel (2), die beiden, für die Bruchrechnung charakteristischen Probleme: Zu einer Reihe von ganzen Zahlen das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu finden, den sogenannten Haupt- oder Generalnenner, und zu zwei ganzen Zahlen den größten gemeinschaftlichen Teiler zu finden. Beide können durch Zerlegung in Primfaktoren erledigt werden.

5. Da die Brüche auf der Zahlengeraden eine sehr anschauliche Versinnlichung finden, so lag es nahe, die gebrochenen Zahlen als Zahlen in die Zahlenreihe einzustellen, die dadurch eine außerordentliche Verdichtung erfährt. Diese Erweiterung der Zahlenreihe ist so natürlich, daß sie zu vorhistorischer Zeit vollzogen ist. Aber die Mächtigkeit der Zahlenreihe ist, wie wir nach G. Cantor zeigen werden, unverändert geblieben. Man bezeichnet die ganzen und die gebrochenen Zahlen mit dem gemeinsamen Namen rationaler Zahlen, und sie bilden in ihrer Gesamtheit den Zahlenkörper der rationalen Zahlen, und wir zeigen nun, daß dieser Körper von gleicher Mächtigkeit ist wie der der ganzen Zahlen. Da nur verschiedene rationale Zahlen in Betracht kommen, so können wir Zähler und Nenner als teilerfremd, den Bruch als reduziert annehmen. Die rationalen Zahlen ordnen wir in Gruppen, wobei eine Gruppe von allen irreduzibeln Brüchen gebildet wird, bei denen die Summe aus Zähler und Nenner denselben Wert hat. Danach gehört zu 1 keine rationale Zahl, zu 2 die Zahlen 1 oder $\frac{1}{1}$, zu 3: $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{1}$ oder 2, zu 4: $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{1}$, zu 5: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{1}$. Jede diese Gruppen enthält notwendig eine endliche Menge von rationalen Zahlen, und sie bilden in ihrer Gesamtheit eine einfach unendliche Reihe wie die Zahlenreihe, näm-

lich die wohlgeordnete Reihe 1, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{3}$, 3, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, 4, $\frac{1}{5}$, 5, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{2}$, 6 usw., mit bestimmtem Anfang, bestimmter Sukzession, ohne Ende, die auf der Zahlenreihe abzählbar ist, und daran wird auch durch die negativen Zahlen nichts geändert.

Man kann, was ich Ihnen zur Übung empfehle, auch die Brüche ordnen nach dem Produkt aus Zähler und Nenner. Man kann die negativen Brüche einordnen, indem man z. B. neben $+\frac{1}{3}$ $(\frac{1}{3})'$ stellt, usw.

In der natürlichen Reihenfolge, in der die rationalen Zahlen nach ihrer Größe folgen, bilden selbst die positiven Brüche wohl eine geordnete, aber keine wohlgeordnete Menge; denn auf keine rationale Zahl folgt eine bestimmte andere, zwischen zwei noch so nahen rationalen Zahlen liegen stets unzählig viele andere von ihnen verschiedene.

6. Die Multiplikation eines Bruches mit einem Bruch knüpft man am besten an die Regeldetriaufgaben, zunächst als bequeme Abkürzung dafür, daß man mit dem Nenner dividiert und mit dem Zähler multipliziert. Was die Regeldetri in der Quarta betrifft, so muß man sich auf das äußerste beschränken und sie dem Zwecke: die Regeln der Bruchrechnung einzuüben, durchaus unterordnen. Vor allem hüte man sich in Quinta und Quarta vor den sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten. Gesellschafts-, Mischungs-, Rabatt-, Diskonto- usw. Rechnungen, und wie sie sonst heißen mögen, sind viel zu schwierig für den Quartaner. Er kann dazu abgerichtet werden, aber das beste Material für die Gleichungen 1. Grades in Tertia ist vergeudet und der geistige Gewinn der Schüler ist gering.

Auf der oberen Stufe kann und muß darauf hingewiesen werden, daß $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}$ die Zahl ist, die in der Reihe der Einheit $\frac{5}{8}$ so aus $\frac{5}{8}$ und ihren Teileinheiten abgeleitet ist wie $\frac{2}{3}$ aus der 1 und ihren Teileinheiten, bzw.: die aus $\frac{5}{8}$ hergeleitet ist wie $\frac{2}{3}$ aus 1, was dann ebenfalls auf Division mit 3 und Multiplikation mit 2 hinauskommt.

7. Die Division des Bruches mit dem Bruch wird am bequemsten begründet durch den Satz $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$. Zwei solche Zahlen, deren Produkt 1 ist, wie 3 und $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{8}$ und $\frac{8}{5}$, nennt man reziprok. Danach ist jetzt die Aufgabe: eine Zahl zu ermitteln, die mit $\frac{a}{b}$ multipliziert $\frac{x}{y}$ gibt, durch $\frac{x}{y} \cdot \frac{b}{a}$ gelöst.

8. Die vier Spezies mit Brüchen sind nun definiert und in vollem Umfange. Die rationalen Zahlen bilden einen Zahlkörper, d. h. jede der vier Spezies, mit Zahlen des Körpers ausgeführt, liefert

wieder eine Zahl des Körpers. Aber das Reduzieren und Gleichnamigmachen sind sehr langwierig, und schon die Addition von $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ liefert 105^{tel}. Deshalb hat die Not dahin geführt, nur mit Brüchen zu rechnen, deren Gleichnamigmachen keine Zeit kostet, d. h. mit Zahlen, deren Nenner die Grundzahlen des Zahlensystems und deren Potenzen sind.

VIII. Abschnitt.

Die Dezimalbrüche.

1. Meine Herren! Die Anfänge der Dezimalbruchrechnung reichen bis zu den Indern, die schon beim Radizieren Nullen anhingen, doch muß gesagt werden, daß die Sexagesimalbrüche der Babylonier, denen wir unsere Minuten und Sekunden verdanken und die Duodezimalbrüche der Römer prinzipiell von ihnen nicht verschieden waren. Feuerbach und Regiomontan gingen zur Dezimalteilung der trigonometrischen Funktionen über, und Regiomontan hebt ganz ausdrücklich die Erleichterung der Bruchrechnung hervor. Aber das Entscheidende ist das Dezimalzeichen. Vieta war es, der im *Canon Mathematicus* 1579 (Franziskus Schooten 1609) den ersten Dezimalbruch schrieb. Aber die eigentlichen Erfinder sind Simon Stevin und Jobst Bürgi. Simon Stevin, der erste Ingenieuroffizier Wilhelms von Oranien, der 1578 seiner *Practique d'Arithmetique* eine kleine Schrift „*la Disme*“ anhing, in der er alle Eigenschaften der Dezimalrechnung und alle Vorteile klar hervorhob und forderte, daß alle Maße dezimal geteilt werden sollten. Es ist freilich langsamer gegangen als Stevin sich träumen ließ. Fast 300 Jahre nachher ist unser deutsches Münz-, Maß- und Gewichtssystem dezimal geteilt worden, und das englische Längenmaß samt dem russischen noch heute nicht. Nach Stevin sieht π so aus:

3 ① 1 ② 4 ③ 1 ④ 5 ⑤ 9.

Völlig selbständig erfand Jobst Bürgi die Dezimalbruchrechnung. Ursprünglich ein einfacher schweizer Mechaniker, war er als Assistent Keplers von Kassel nach Prag gekommen. Bürgi hat das Dezimalzeichen. Er und mit ihm Kepler schrieben 3,141 . . .

Das Entscheidende liegt in dem von Stevin ausdrücklich ausgesprochenen Satz: Der mit seinem Zeichen versehene Dezimalbruch bleibt unverändert, wenn man hinten eine Null, also beliebig viele, anhängt.

2. Wir definieren: Der Dezimalbruch ist ein Bruch, dessen Nenner 10 oder eine Potenz von 10 ist: $\frac{a}{10^k}$; der Dezimalbruch ist daher ein Bruch wie alle anderen, und es gelten für ihn alle Regeln der Bruchrechnung. Man schreibt ihn gewöhnlich, indem man den Zähler hinschreibt und so viel Ziffern von rechts nach links durch ein Komma abschneidet, als der Exponent des Nenners angibt, wobei für 10 selbst als Exponent 1 fingiert wird.

Meine Herren, eine methodische Bemerkung: Eine unangenehme Begleiterscheinung der Dezimalteilung unserer Maße ist die Durchnahme der Dezimalbrüche in Sexta vor den gemeinen Brüchen (*numeri rupti*, Leonardo Pisano); allerdings unter dem Pseudonym von Dezimalzahlen. Selten lassen sich die Elementarlehrer diese Bekundung ihres Wissens entgehen. Es haben sich so ziemlich alle Mathematiker dagegen ausgesprochen, aber vergeblich. In meiner Methodik von 1895 habe ich noch einmal die Gründe zusammengestellt:

a) Der Bruch $\frac{7}{10}$ setzt den Begriff der Teileinheit gerade so voraus wie $\frac{7}{9}$.
b) Die Regeln der Addition und Subtraktion können nur mit Mühe, die Regeln über die Multiplikation und Division gar nicht zum Verständnis gebracht werden.
c) Die Dezimalbrüche sind sehr ungeeignet für Kopfrechnen.
d) Es wird der historische Gang ohne Not verletzt.
e) Es wird Grund und Folge umgekehrt, denn die Dezimalteilung der Maße ist eine Folge der Dezimalbrüche und nicht umgekehrt.
f) Die Schüler begreifen die große Bedeutung der Dezimalbrüche nicht, ehe sie wissen, wie zeitraubend das Rechnen mit ungleichnamigen Brüchen ist.
g) Die Schüler begreifen absolut nicht, weshalb sie in Quinta mit der gemeinen Bruchrechnung gequält werden. Die Konsequenz würde doch verlangen, daß die ganze Bruchrechnung auf den einen Satz eingeschränkt werde: einen gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln. Wunderbarerweise hat sich in einem Konflikt, in den ein tüchtiger Mathematiker mit den Elementarlehrern seiner Anstalt geraten war, ein Provinzialschulkollegium diese Gründe angeeignet.

3. Die Regeln der Addition, Subtraktion und Multiplikation von Dezimalbrüchen sind dann selbstverständlich. Bei der Addition, die vollzogen ist, indem man die Dezimalbrüche mit den Kommata untereinander schreibt und die fehlenden Stellen durch Nullen ergänzt denkt, muß bemerkt werden, daß jede einzelne Ziffer hinter dem Komma so gut eine bestimmte Bedeutung hat, wie eine jede Ziffer

vor dem Komma. Es ist die k^{te} Ziffer von den Einern aus rechts durch 10^k dividiert wie die k^{te} links mit 10^k multipliziert ist. Man bezeichnet die k^{te} Ziffer rechts vom Komma als die k^{te} Dezimale.

4. Division: Dividend und Divisor werden gleichnamig gemacht durch Anhängung der nötigen Anzahl Nullen. Dann werden die Kommata weggelassen, weil $\frac{a}{x} : \frac{b}{x} = \frac{a}{b}$. Da die Division aus der Dezimalbruchform herausführen würde, so läßt sich die Aufgabe: einen gewöhnlichen Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln, nicht umgehen. Sei $\frac{a}{b}$ ein reduzierter Bruch, so müßte $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{10^k}$ sein (10 selbst als 10^1 gesetzt). Daher $a \cdot 10^k = b \cdot \alpha$, wo α eine ganze Zahl ist. Nach Voraussetzung sind a und b teilerfremd. Also muß 10^k durch b teilbar sein. Also lassen sich nur die Brüche, deren Nenner von der Form $2^\lambda 5^\mu$ sind, in Dezimalbrüche verwandeln. Man steht nun vor der Wahl, die Dezimalbruchrechnung aufzugeben oder das Verwandlungsproblem weiter zu bearbeiten.

5. Da die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{x}{10^k}$ sich hinsichtlich ihrer Größe vergleichen lassen, indem man sie gleichnamig macht und die Glieder der Teilreihe Nr. 10^k stets um $\frac{1}{10^k}$ wachsen, so muß, falls b andere Primfaktoren als 2 und 5 enthält, sich ein Glied x der Teilreihe 10^k finden, das kleiner als $\frac{a}{b}$, während das nächstfolgende größer als $\frac{a}{b}$ ist. Damit $\frac{a \cdot 10^k - x \cdot b}{b \cdot 10^k} < \frac{1}{10^k}$ sei, ist nur nötig, daß $a \cdot 10^k - xb < b$ sei. Dies wird dadurch erreicht, daß man $a \cdot 10^k$ durch b dividiert, also auf die Form $qb + r$ bringt und dann $x = q$ setzt.

6. Da die Brüche durch Teile der Haupteinheit versinnlicht werden können und umgekehrt, unser Anschauungsvermögen aber an sehr enge Schranken gebunden ist, so kann für die Praxis der Bruch $\frac{a}{b}$ durch $\frac{x}{10^k}$ ersetzt werden. Beispielsweise geht für die Zeit unsere Genauigkeit nicht über ein Zehntel Sekunde, für Längen nicht über den Millimillimeter, d. h. wir sind nicht imstande zu beweisen, daß die von uns gemessene Strecke wirklich die von uns ermessene Maßzahl besitzt. Es bleibt immer ein Spielraum bis zu plus oder minus 0,001 mm. Wir haben von keiner Strecke eine absolut scharfe Vorstellung, auch wenn wir die Messung zu Hilfe nehmen.

Will man z. B. $\frac{5}{7}$ in einen Dezimalbruch genau bis auf $\frac{1}{10^6}$ verwandeln, so dividiert man 5 mit 6 angehängten Nullen durch 7; dies gibt 714 285, also $\frac{5}{7} = 0{,}714\,285 + \frac{\varepsilon}{10^6}$, wo $\varepsilon < 1$ (hier gleich $\frac{5}{7}$).

Da man diese Entwicklung beliebig weit fortsetzen kann, so sehen wir, daß alle auf die k^{te} Stelle folgenden Dizimalen zusammen kleiner als eine Einheit der k^{ten} Stelle sind. Dies läßt sich auch leicht direkt zeigen, denn selbst wenn die Ziffern a_{k+1} bis a_{k+p} alle gleich 9 sind, so ist ihre Summe erst

$$\frac{9_1 9_2 \cdots 9_p}{10^k \cdot 1\,0_1 0_2 \cdots 0_p}, \quad \text{also gleich} \quad \frac{9_1 9_2 \cdots 9_p}{\underline{1\,0_1 0_2 \cdots 0_p}}, \\ 10^k$$

also $< \frac{1}{10^k}$. Hierin liegt die Begründung der gebräuchlichen Verwandlung, welche darin besteht, daß man vom Quotienten, bzw. Bruch, der Reihe nach erstens die größte in ihm enthaltene ganze Zahl bestimmt, dann die größte im Rest enthaltene Anzahl Zehntel, dann die Hunderstel, usw. Das Schema ist das folgende:

$$a = qb + r,\ r < b;\ \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b};\qquad \frac{r}{b} < 1;$$

$$10r = q_1 b + r_1,\ r_1 < b;\ \frac{a}{b} = q + \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10b};\qquad \frac{r_1}{10b} < \frac{1}{10};$$

$$10r_1 = q_2 b + r_2,\ r_2 < b;\ \frac{a}{b} = q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{r_2}{100b};\qquad \frac{r_2}{100b} < \frac{1}{100};$$

$$10r_2 = q_3 b + r_3,\ r_3 < b;\ \frac{a}{b} = q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{q_3}{100} + \frac{r_3}{1000b};\quad \frac{r_3}{1000b} < \frac{1}{1000}$$

usw.

Dies Schema gibt das gewöhnliche Verfahren, z. B.

$$\begin{array}{l} 5 : 7 = 0{,}714\,285 \\ 0 \\ \overline{10} \\ \quad 30 \\ \quad \overline{20} \\ \quad\ 60 \\ \quad\ \overline{40} \\ \quad\ \ 5 \end{array}$$

7. Hierbei sind wiederum zwei Möglichkeiten: Wenn der Nenner $b = 2^\alpha \cdot 5^\beta$, so hat das Verfahren bei der α- oder β-Stelle ein Ende, je nachdem $\alpha > \beta$ oder $\beta > \alpha$; ist dies nicht der Fall, so hat das Verfahren an sich kein Ende, und wir müssen es an einer passenden Stelle künstlich herbeiführen. In diesem Falle muß einer der $(b-1)$ Reste spätestens bei der b^{ten} Division wiederkehren. Dann kehren aber auch alle auf diesen folgende wieder samt den zugehörigen Quotienten, und wir sind daher imstande, ohne die Rechnung auszuführen, die Ziffer jeder beliebigen, noch so entfernten Dezimale anzugeben und somit im äußersten Falle, von der b^{ten} Dezimale an, den Prozeß

mühelos so weit fortzusetzen als wir wollen. Wir nennen den Dezimalbruch rein periodisch, wenn die Periode gleich nach dem Komma beginnt; im andern Falle die Stellen, die der Periode vorangehen, unrein. Aus dem Umstand, daß jede Stelle ihren bestimmten Nenner hat, folgt, daß unreine Stellen nur vorkommen, wenn der Bruch im Nenner die Faktoren 2 oder 5 hat. Der gewöhnliche Bruch, wie $\frac{5}{7}$, und der Algorithmus seiner Verwandlung in einen Dezimalbruch setzen also eine unendliche Folge von Zahlen, welche vollkommen bestimmt sind und wohl definiert und wohl geordnet sind, so daß wir sogar imstande sind, jedes Glied, und sei es auch noch so entfernt, anzugeben.

8. Wir schreiben $\frac{5}{7} = 0{,}\overline{714285}$. Das Gleichheitszeichen hat jetzt zweifellos eine neue erweiterte Bedeutung; $\frac{a}{b} = 0{,}\overline{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu}$ ist nur eine Abkürzung dafür, daß der Bruch $\frac{a}{b}$ in der Zahlenreihe zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zahlen mit dem Nenner $10^{\nu+\mu}$ fällt, bzw. daß die Differenz beider Seiten kleiner gemacht werden kann als jede noch so klein angegebene Zahl.

Die Gleichung läßt sich auch interpretieren als Abkürzung für den irrealen Bedingungssatz: Wenn wir den durch den Strich angedeuteten Prozeß zu Ende führen könnten, so würde die Summe der sämtlichen Dezimalen $\frac{5}{7}$ sein.

9. Es hindert nun nichts, den betreffenden Prozeß zu Ende geführt zu denken, d. h. der unabgeschlossenen unendlichen Reihe von Vorstellungen als Neues ein Ende hinzuzudenken, durch das wir eine neue Vorstellung bilden, welche durch die frühere Reihe hervorgerufen wird. Ja wir sind geradezu zu diesem Abschluß gezwungen, und nur durch diese Eigentümlichkeit unseres Intellekts wird z. B. der Übergang von der Bewegung zur Ruhe begriffen. Dieser hinzugedachte Abschluß einer an sich unendlichen Vorstellungsreihe heißt die Grenze derselben. Man sieht, daß der Grenzbegriff die bisherigen Zahlen umfaßt, denn auch die Anzahlen, wie 5, 7 usw., sind nichts anderes als der Abschluß des Zählprozesses; und die gebrochenen Zahlen werden auf Anzahlen von Teileinheiten zurückgeführt. Es ist daher der Grenzbegriff nichts als die natürliche und notwendige Erweiterung des Begriffes: Zahl.

Die Grenze der wohldefinierten, einfach unendlichen Mannigfaltigkeit von Zahlen, welche der periodische Dezimalbruch liefert, z. B. $0{,}\overline{714285}$, definieren wir selbst wieder als Zahl zum Unterschied von den bisherigen Zahlenarten: Reihenzahl genannt; und zwar wird diese Zahl dem Bruche $\frac{5}{7}$ identifiziert, so daß die Anzahl der Glieder der Zahlenreihe nicht vermehrt wird. Wir stellen sie also als Glied in die Zahlrenreihe ein. Die Berechtigung dazu werden wir, da eine

der wesentlichsten Voraussetzungen über die bisher gültigen Regeln, nämlich die Endlichkeit, verletzt ist, besonders nachweisen müssen. Dies soll aber erst im XI. Abschnitt geschehen.

10. Bei der numerischen Rechnung ist es nötig, bei irgend einer Stelle abzubrechen. Die Durchmusterung aller Möglichkeiten zeigt, daß der Fehler stets kleiner gemacht werden kann als eine halbe Einheit der Abbruchstelle. Ist die erste fortfallende Dezimale nicht größer als 4, so wird einfach abgebrochen, ist dieselbe nicht kleiner als 5, so wird die letzte Stelle mit erhöht.

Unter der Voraussetzung, daß die Regeln der Rechnung mit Reihenzahlen begründet sind, läßt sich auch das Umkehrungsproblem lösen, zu einem vorgegebenen rein oder unrein periodischen Dezimalbruch den Bruch anzugeben.

$$x = 0, \overline{a_1 a_2 \cdots a_\nu}; \qquad 10^\nu x = a_1 a_2 \cdots \alpha_\nu, \overline{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu};$$

$$(10^\nu - 1)x = a_1 a_2 a_3 \cdots a_\nu; \qquad x = \frac{a_1 a_2 a_3 \cdots a_\nu}{9\,9\,9 \cdots 9}.$$

Ist: $$y = 0, b_1 b_2 \cdots b_k \overline{a_1 a_2 \cdots a_\nu},$$

so ist: $$10^{k+\nu} y = b_1 \cdots b_k a_1 \cdots a_\nu, \overline{a_1 a_2 \cdots a_\nu},$$

$$y 10^k (10^\nu - 1) = b_1 \cdots b_k a_1 \cdots a_\nu - b_1 \cdots b_k = z,$$

also:

$$y = \frac{z}{9_1 9_2 \cdots 9_\nu 0_1 0_2 \cdots 0_k}.$$

Für abgekürzte Multiplikation und Division vergleiche Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig 1900, und besonders auch für die Schätzung der Fehler.

IX. Abschnitt.

Vom Rechnen mit benannten Zahlen bzw. vom Begriff des Verhältnisses.

1. Richten wir unsere Aufmerksamkeit nicht nur auf die Anzahl der Elemente eines Komplexes, sondern zugleich auf die Eigenschaften derselben, so schaffen wir benannte Zahlen, Zahlengrößen, schlechtweg Größen genannt. Der Begriff der Größe schließt die Teilbarkeit ein. Ist die Teilbarkeit uneingeschränkt, kein Teil der letzte, so heißt die Größe stetig oder kontinuierlich, sonst unstetig oder diskontinuierlich.

Sind alle Elemente von derselben Beschaffenheit, oder sehen wir von dem Unterschiede ab, so haben wir einfach benannte Größen, bzw. Zahlen. Sind zwei oder mehr Gruppen gleicher oder gleich-

gesetzter Elemente — Einheiten, Maßgrößen — vorhanden, so haben wir zwei- oder mehrfach benannte Zahlen.

2. Die Addition oder Subtraktion beliebig vielfach benannter Zahlen macht keine Schwierigkeit. Wir definieren:

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 \cdots \pm b_1 c_1 + b_2 c_2 + \cdots = (a_1 \pm b_1) c_1 + (a_2 \pm b_2) c_2 + \cdots,$$

wobei, um die Subtraktion durchzuführen, nötig ist, daß zu jeder Einheit e_k eine entgegengesetzte e_k' gedacht werden kann. Die Multiplikation liefert im allgemeinen unübersteigbare Hindernisse. Schon wenn man zwei gleichbenannte Zahlen einer Einheit, oder wenn man zwei einfach benannte Zahlen multiplizieren will, hat man vor allem den Sinn des Produkts der Einheiten festzustellen; und wenn das auch in einzelnen Fällen, wie 1 kg · 1 m = 1 kgm oder Masse mal Beschleunigung gleich Kraft mit Erfolg geschehen kann, so ist doch das Produkt zweier solcher Zahlen von den Faktoren der Art nach wesentlich verschieden.

3. Bei der Multiplikation muß der Multiplikator stets unbenannt sein, doch ist es Brauch, willkürlich zu sagen: a kg · b oder $b \cdot a$ kg. Das Wesen der Multiplikation als Bildung von Zahlenreihen mit geänderter Einheit tritt sehr scharf hervor. Ebenso fallen die beiden Arten der Division, Teilung und Messung, deutlich auseinander. Die Teilung ist laut Definition der kontinuierlichen Größe uneingeschränkt. Anders steht es mit der Messung. Der Satz: Das Verhältnis zweier kontinuierlichen gleichartigen Größen a und b ist eine bestimmte Zahl, gilt nämlich nur, wenn wir auch Reihenzahlen als Zahlen zulassen, und zwar auch solche, bei denen jede folgende Dezimale nur mit Hilfe der vorhergehenden bestimmt wird. Für den Begriff: Verhältnis verweise ich auf Webers Enzyklopädie der elementaren Arithmetik von 1903 oder auf meine „Elemente der Geometrie“ von 1890.

X. Abschnitt.

Gleichungen ersten Grades.

1. Jede Operation wurde mit einer bestimmten Gleichung identifiziert. Alle vier Spezies lassen sich also zusammenfassen unter dem Gesichtspunkte der Gleichung. Das Wort *species* in der Bedeutung Rechenoperation ist die lateinische Übersetzung des griechischen Wortes εἶδος von Diophant und bedeutet bestimmte Gestaltung. Zur Zeit ist es zuerst um 1200 in einem Kodex des Klosters Salem in seiner arithmetischen Bedeutung nachgewiesen. Dieser Gesichtspunkt der Gleichung, der bei Addition und Multiplikation infolge der

Übung verwischt ist, trat deutlicher bei der Subtraktion und ganz scharf bei der Division hervor. Das Eigenartige besteht darin, daß wir, noch ehe wir von dem Wert, ja selbst von der Existenz der resultierenden Zahl die Vorstellung haben, schon ein Zeichen, z. B. x, dafür einführen und dies in Beziehung zu bekannten Zahlen bringen, dann durch Versuche, welche der Natur der Beziehung angepaßt sind, Existenz und Wert zugleich bestimmen. Die Auflösung der mathematischen Gleichung ist das klassische Beispiel für das, was man philosophisch indirekte Begriffsbestimmung nennt; es ist die beste Illustration des Sprichworts: Sage mir, mit wem du gehst, und ich sage dir, wer du bist. Es ist freilich auch der vierte Punkt zu drei harmonischen, ebenso ein indirekter, d. h. durch Beziehungen bestimmter Begriff, und das Dreieck, von dem b, h_2, β gegeben sind, nicht minder, auch jeder Indizienbeweis der Juristen liefert ein solches Beispiel. Die Kunst des Mathematikers besteht eben darin, die indirekt durch ihre Beziehung zu bestimmten Zahlen gegebene Zahl x in immer einfachere Beziehungen zu bringen und sie zuletzt zu einer völlig scharfen Vorstellung, zu einer direkt bestimmten Zahl zu machen.

2. Eine Gleichung, in welcher auf beiden Seiten eine, zwei usw. noch zu bestimmende Zahlen vorkommen, heißt eine Bestimmungsgleichung mit einer, zwei, drei usw. Unbekannten. Kommt die Unbekannte nur mit bekannten Zahlen multipliziert und dividiert vor, so heißt die Gleichung: vom ersten Grade. Alle Gleichungen ersten Grades lassen sich auf einen der bei den vier Spezies behandelten Typen zurückführen. Diese vier, und somit alle, hatten ein ganz bestimmtes Ergebnis, und dies findet seinen Ausdruck in den Sätzen: Gleiches zu, von, mal durch Gleiches gibt Gleiches, mit deren Hilfe die Reduktion auf einen der vier Typen bewirkt wird, meistens auf den der Division $ax = b$, wo $a \neq 0$ sein muß. Alle wurden sie dadurch gelöst, daß man für die Unbekannte Werte probiert, bis der passende Wert gefunden ist, und wenn sich zunächst keine solche passende Zahl findet, wie z. B. bei $7 + x = 5$ und $4x = 11$, den Zahlbegriff angemessen erweitert. In diesem Sinne spricht man von der zahlenbildenden Kraft der Gleichung. Es ist bequem, dafür zu sorgen, daß die eine Seite, in der Regel die rechte, einen festen, konstanten Wert hat, so daß die linke Seite sich, je nach dem für die Unbekannte probeweise eingeführten Werte, ändert, bis die Gleichheit mit der rechten Seite erzielt, die Gleichung gelöst ist. Wir haben hier für die Gleichung ersten Grades dieselbe Methode, welche die Lösung der Gleichung jeden Grades gibt; die Unbekannte geht in die Freiveränderliche, die Unabhängige, Variable über, der Ausdruck auf der linken Seite, dessen Wert von dem jedesmaligen Wert der Unabhängigen abhängt und durch ihn völlig bestimmt ist, in die

Funktion der Variablen über. Wir bezeichnen die Unabhängige gern mit x. Zuerst bei Descartes in dem berühmten Werke *La Géométrie* von 1637. x hat anfangs keinen Vorzug vor y und z, und zwar sind diese Buchstaben gewählt, weil Descartes die Bekannten mit a, b, c bezeichnet, und anfangs ist sogar konsequenterweise z bevorzugt. Das Gleichheitszeichen danken wir Recorde 1552 mit der Motivierung: „Da keine zwei Dinge gleicher sein können als ein Paar paralleler gleichlanger gerader Linien“. Das Wort Funktion rührt von Leibniz her; seine Anwendung in diesem Sinne von Jacob Bernoulli; die ersten Funktionszeichen entnahm Leibniz der Astronomie, also ☽, ♀ usw., $\varphi(z)$ zuerst 1710, dann 1733 bei Clairant $\varphi(x)$, $F(x)$ usw.; dann Euler $f(x)$. Das Wort Koeffizient stammt von Vieta.

3. Die Lösung der Gleichungen ersten Grades führt zu dem Satz: Jede endliche Folge von Spezies (natürlich mit Ausschluß der verbotenen Division durch Null) an Zahlen unserer Reihe gibt ein ganz bestimmtes Glied der Reihe, d. h. wir bleiben im Zahlkörper der rationalen Zahlen.

4. Über Systeme von Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten fasse ich mich kurz. Ihre Lösung besteht im Prinzip in der Substitutionsmethode, d. h. darin, daß wir eine der Unbekannten, z. B. x, aus der ersten Gleichung durch die Konstanten und die anderen Unbekannten, die wir als feste Zahlen ansehen, ausdrücken und diesen Ausdruck in die übrigen Gleichungen einsetzen, wodurch die Zahl der Unbekannten und die der Gleichungen um eins vermindert wird. Es sind also zur Bestimmung von n Unbekannten n unabhängige Gleichungen nötig.

5. Was den Ansatz der Textgleichungen betrifft, so ist dies für die Schule eine der wichtigsten Aufgaben, die eigentlich von Sexta bis Prima geübt wird. Nur drei methodische Bemerkungen:

a) Die Gleichung wird gewonnen durch doppeltes Ausdrücken derselben Größe, wobei der Schüler Urteilskraft, wenn auch in bescheidenstem Umfang, entfalten muß. Er muß wissen, bzw. lernen: daß das Ganze gleich der Summe seiner Teile, daß der Wert der Mischung gleich der Summe der Werte der Bestandteile, daß der Reingehalt der Mischung gleich der Summe der Reingehalte der Bestandteile ist, der Raum des Ganzen gleich der Summe der Räume der Bestandteile, der Verkaufspreis gleich Einkaufspreis plus Gewinn usw., und dabei geübt werden, sich die Dinge, von denen die Rede ist, anschaulich vorzustellen.

b) Es muß geübt werden, sich Angaben, die fehlen, zu ergänzen, z. B. in der bekannten Aufgabe von den zwei Quellen, die ein Bassin füllen, den Inhalt des Bassins, da er jedenfalls ein ganz bestimmter ist, also durch eine den Rechnungsregeln unter-

worfene, von Null verschiedene Zahl, ausgedrückt wird, anzunehmen, und zwar mit a hl und nicht etwa ihn gleich 1 zu setzen. Desgleichen in der Aufgabe, die der Uhraufgabe voraufgeht, von den zwei Pferden, von denen das eine den Zirkus in 4′ durchläuft, das andere in 3′, den Umfang des Zirkus mit a m anzunehmen, usw.

c) Es muß dem Schüler immer wieder eingeschärft werden: Je mehr Unbekannte, desto zahlreicher die Beziehungen, desto leichter der Ansatz, z. B. bei der Aufgabe: Jemand will sich 12 hl Wein à 80 ℳ mischen aus zwei Sorten à 60 und à 108 ℳ; wieviel muß er von jeder Sorte nehmen? ist es viel natürlicher, daß der Schüler sagt: von der ersten nimmt er x, von der zweiten y. Bei weitem die meisten der Aufgaben, welche Bardey als Gleichungen 3. Stufe bezeichnet, sind nur deshalb schwierig, weil der Schüler sich mit einer Unbekannten abquält; z. B. die Aufgabe: Gib du mir 1 ℳ ab, so habe ich dreimal soviel wie du; und der andere: Gib du mir 1 ℳ, so haben wir beide gleich viel: $(x + 1) = 3(y - 1)$ und $(x - 1) = y$.

Der Übungsstoff in unseren Sammlungen — ich nenne Meyer-Hirsch, Heis, Bardey — ist größtenteils durch Jahrtausende zu verfolgen. Es ist aus Ahmes, aus Diophant, den Indern, Beda, dem Ehrwürdigen, den Arabern, Leonardo, Lucas Pacciolo, Sturm usw. zusammengeflossen.

XI. Abschnitt.

Vom Rechnen mit Reihenzahlen.

1. Unser Intellekt wird einerseits vom psychischen Trägheitsgesetz beherrscht, demzufolge wir eine Vorstellungsreihe fortsetzen, bis wir durch eine Ursache oder einen Grund gezwungen werden, sie zu enden, andererseits vom Hemmungsprinzip, das uns zwingt, zu einer Vorstellungsreihe, die an sich keinen Abschluß hat, einen Abschluß zu denken, den Abschluß durch eine neue Vorstellung herbeizuführen. Zu solchen Vorstellungsreihen gibt besonders Raum und Zeit Veranlassung; wir haben aber schon im periodischen Dezimalbruch eine solche Reihe kennen gelernt. Beispiel sei die Reihe der Zeitmomente, während derer Achilleus der Schildkröte nachläuft, oder die Reihe der Verstärkungen, welche der elektrische Kondensator in der Sammelplatte hervorruft, die Reihe der Stammbrüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, . . ., die Reihe der Wege, welche die Elfenbeinkugel, die senkrecht auf die

Marmorplatte auffällt, zurücklegt. In allen diesen Fällen denken wir den Abschluß durch eine Vorstellung hinzu, welche die Grenze der betreffenden Reihe heißt. Die „Grenze“ ist also von den Gliedern der Reihe wohl zu unterscheiden, weil sie als ein Neues von der Vernunft hinzugefügt wird. Die so durch einen Grenzübergang gebildeten Begriffe heißen „Grenzbegriffe“. Die Grenze ist aber keineswegs von ihrer Reihe unabhängig; sie ist durch die Reihe bestimmt und mit ihr zugleich gegeben, wenn auch zunächst nur indirekt, wie das x in der Gleichung, wie die Ursache, wenn die Wirkung beobachtet wird. So ruft die sich mehr und mehr verlangsamende Bewegung des in die Halle einfahrenden Eisenbahnzuges mit Notwendigkeit die Vorstellung der Ruhe als Grenzabschluß wach, so geht die Reihe der einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vielecke bei stetig sich verdoppelnder Seitenzahl schließlich in die des Kreises über, so hat die Reihe der Zahlen 0,3, 0,33, 0,333 . . ., deren Dreifaches sich mehr und mehr der 1 nähert, zur Grenze die Zahl, welche dreimal genommen 1 gibt: $\frac{1}{3}$. Ob die so als indirekte Vorstellungen gegebenen Grenzbegriffe schließlich zu direkten, anschaulichen, völlig scharfen Vorstellungen werden, hängt von den Umständen ab, bzw. von der Deutlichkeit, Fülle und Wichtigkeit der Merkmale und Beziehungen. Die wichtigsten Grenzbegriffe sind die des unendlich Großen oder des unendlich Kleinen, ohne welche Funktionentheorie und Differentialrechnung nicht vorhanden wären. Sie lassen sich, wie Bolzano in seinen *Paradoxien* des Unendlichen bemerkt hat, zurückführen auf die Unendlichkeit der Zahlenreihe. Ihre weitere Analyse, sowie die der Grundbegriffe der Geometrie, die samt und sonders Grenzbegriffe sind, z. B. Mittelpunkt, Länge, Flächeninhalt, Volumen, Punkt, Winkel usw., gehören nicht in den Rahmen dieser Vorlesungen.

2. Sei a, $a + 0$, $a + 0 + 0$, $a + 0 + 0 + 0$ usw. eine unendliche Reihe von Zahlen, so fällt sie unter das Grundgesetz, kurz unter 1 und ihre Grenze ist a; denn da alle Glieder der Reihe gleich a sind, so liegt kein Grund vor, die Grenze von a verschieden zu denken.

3. Ist a_1, a_2, a_3 . . . eine unendliche Folge von Zahlen und von einem bestimmten Index an $a_{n+1} > a_n$, und gibt es eine Zahl a, welcher die Glieder der Reihe mit wachsendem Index n so nahe kommen, als man will, ohne sie je zu erreichen, so daß sich also für jedes noch so kleine vorgegebene $+\varepsilon$ ein Index n bestimmen läßt, so daß $a - a_{n+k} < +\varepsilon_n$ ist — wo k beliebig — so hat die Reihe die Grenze a.

Beispiel: 0,9, 0,99, 0,999 . . . Grenze 1.

Hierunter fallen alle periodischen Dezimalbrüche, aber nicht alle Reihen von der Form:

$$1,\ 1+\frac{1}{x},\ 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^1},\ 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\cdots,$$

sondern nur diejenigen, in denen $x > 1$, wo dann die Grenze $\frac{x}{x-1}$ heißt.

4. Sei $b_1 b_2 b_3$ usw. eine Reihe von der Eigenschaft

$$b_r > b_{r+1} > b_{r+2},\ \text{usw.},$$

und es gäbe eine Zahl b, so daß $b_{n+k} - b$ stets kleiner $+\varepsilon$, so fällt auch diese Reihe unter Grundsatz 1., und die Grenze derselben nennen wir b.

Beispiel: $2,\ 2-\frac{1}{2},\ 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$, usw.: Grenze 1.

5. Hat im Falle 4. die Grenze den Wert Null, so heißt die Reihe eine „Nullreihe", für welche also $b_i < b_{i-1}$ und b_{n+k} selbst $< \varepsilon$ ist.

Beispiel: 1, 0,1, 0,01, 0,001, $\cdots$

6. Alle diese Reihen, als deren Grenze wir bekannte Zahlen der Zahlenreihe erhalten haben, hatten die Eigenschaft gemeinsam, daß, wenn man die Reihe mit $a_1 a_2 \cdots$ bezeichnet, $a_{n+k} - a_n$ dem absoluten Betrage nach $< \varepsilon$ ist, wo ε beliebig klein vorgegeben, n bestimmt und k jede beliebige Zahl ist. Es ist nun ein natürlicher Schritt, allgemein die Reihen zu betrachten, welche die hervorgehobene Fundamentaleigenschaft besitzen, nämlich, daß sich für jedes noch so kleine ε ein Index n findet, so daß $a_{n+k} - a_n$ für jedes k kleiner ist als ε, dem absoluten Betrage nach, und ihnen eine Grenze zuzuweisen. Für den Fall, daß diese Grenze sich nicht unter den bisherigen Zahlen findet, stellt man sie als neue Zahl in die Zahlenreihe ein, sobald wir nachgewiesen haben, daß für sie die Regeln der Rechnungsweise gültig bleiben; diese Reihen heißen Fundamentalreihen, ihren Grenzen Reihenzahlen. Wir führen für sie Zeichen ein; wird die Grenze durch die Reihe selbst bezeichnet, so schließen wir die Reihe in Klammern ein. Also: $a = (a_1 a_2 a_3 \cdots)$.

7. Zwei Reihenzahlen heißen gleich, wenn die Reihe der Differenzen ihrer Glieder eine Nullreihe ist und können als gleich mit demselben Zeichen bezeichnet werden. Gibt es eine Reihen- oder gewöhnliche Zahl y, so daß $y - a_{n+k} < \varepsilon$ ist, so sagen wir: $y = a$. Insbesondere können alle Nullreihen mit 0 bezeichnet werden und dieser Begriff auch auf Reihen wie $1, -0{,}1, +0{,}01 - 0{,}001, \cdots$ ausgedehnt werden, so daß Nullreihe jede Fundamentalreihe heißt, für welche a_{n+k} dem absoluten Betrage nach $< \varepsilon$ ist.

8. Es folgt der wichtige Satz: Jede Reihenzahl kann mit jedem hinlänglich entfernten Gliede bezeichnet werden; denn a_{n+k} ist Grenze von $(a_{n+k}, a_{n+k}, \cdots)$, die Zahlen, welche nach

diesem Satz als Zeichen für die Nullreihen auftreten können, nennen wir unendlich klein; eine solche Zahl kann also kleiner als jede beliebige vorgegebene Zahl ε werden.

9. Ist:

$$a = (a_1 a_2 \cdots) \quad \text{und} \quad b = (b_1 b_2 \cdots),$$

ferner α eine bestimmte positive Zahl, und:

$$a_{n+k} - b_{n+k} > \alpha,$$

so heißt $a > b$. Ist $b_{n+k} - a_{n+k} > \alpha$, so heißt $a < b$. Andere als die unter 7. und 9. angegebenen Beziehungen, insbesondere etwa Unbestimmtheit der Differenzen, sind bei Fundamentalreihen vermöge ihrer Definition ausgeschlossen.

10. Jede einfach unendliche Reihe von endlichen Zahlen, deren Glieder von einem gewissen Gliede an immer zunehmen, dabei aber numerisch unterhalb einer angebbaren Zahl g bleiben, ist eine Fundamentalreihe.

Beweis. Falls:

$$a_{n+k} - a_n$$

nicht kleiner als ε ist, so sei k' der kleinste Wert, so daß:

$$a_{n+k'} - a_n > \varepsilon,$$

und ebenso sei $k''k''' \cdots$ je der kleinste Wert von k, und:

$$a_{n+k''} - a_{n+k'} > \varepsilon,$$

$$\underline{a_{n+k^{(\nu)}} - a_{n+k^{(\nu-1)}} > \varepsilon,}$$

$$a_{n+k^{(\nu)}} - a_n > \nu \cdot \varepsilon,$$

und so wäre:

$$\underline{a_{n+k^{(\nu)}} > g.}$$

Entsprechend ist der Beweis des entsprechenden Satzes, wenn g die untere Grenze und die Glieder abnehmen.

11. Ist $a = (a_1 \cdots)$ und $b = (b_1 \cdots)$, so existieren $a \pm b$, $a \cdot b$, und wenn b keine Nullreihe begrenzt $\frac{a}{b}$ in der Weise, daß die betreffenden Zeichen Fundamentalreihen begrenzen oder bezeichnen, deren Glieder die entsprechende Zusammensetzung haben. Den Beweis für Addition und Subtraktion kann ich übergehen. Ich führe den Beweis für die Operationen der 2. Stufe.

Es ist:

$$a_{n+k} - a_n < \varepsilon, \quad b_{n+k} - b_n < \eta:$$

dann ist:

$$a_{n+k} \cdot b_{n+k} - a_n b_n < (a_n + \varepsilon)(b_n + \eta) - a_n b_n,$$

oder:

$$< \varepsilon b_n + \eta a_n + \varepsilon\eta;$$

also auch wenn etwa $\eta > \varepsilon$:

$$a_{n+k}b_{n+k} - a_n b_n < \eta(b_n + a_n + \varepsilon) \quad \text{oder} \quad < \delta,$$

wo δ beliebig klein.

Beweis für die Division:

$$\frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} - \frac{a_n}{b_n} = d < \frac{a_n + \varepsilon}{b_{n+k}} - \frac{a_n}{b_n},$$

$$d < \frac{(a_n + \varepsilon)b_n - a_n b_{n+k}}{b_n b_{n+k}} < \frac{a_n(b_n - b_{n+k}) + \varepsilon \cdot b_n}{N},$$

$$d < \frac{a_n|\eta| + \varepsilon b_n}{b_{n+k}b_n} < \delta,$$

wo δ unendlich klein, außer wenn b eine Nullreihe begrenzt. Damit ist zugleich auch die Erweiterung der Gleichheit in 7. begründet.

12. Die Definitionen in 11. zeigen, daß die Regeln der Rechnung sämtlich bestehen bleiben, weil wir die Operationen für die Grenzen auf die Glieder der sie definierenden Fundamentalreihen übertragen haben. Die Erweiterung des Zahlbegriffs durch die Reihenzahlen als Grenzen der Fundamentalreihen ist somit gerechtfertigt.

13. Diese Darstellung ist im wesentlichen von G. Cantor beeinflußt; unabhängig von Cantor, aber zeitlich später ist die Dedekindsche, die von der G. Cantors im letzten Grunde nicht verschieden ist und der z. B. H. Weber in seiner Enzyklopädie gefolgt ist. Aus der Definition der Fundamentalreihe und den Definitionen in 7—9 folgt nämlich sofort, daß, wenn eine Fundamentalreihe gegeben ist, von jeder Zahl z der Zahlenreihe festgestellt werden kann, ob sie größer, kleiner, gleich als die Reihenzahl ist. Denn da jede Zahl z als $(z, z \cdots)$ erklärt werden kann, so bleiben nur die drei Möglichkeiten $z - a_{n+k} > < \alpha$, $z - a_{n+k} < \varepsilon$. Die Reihenzahl bringt also, wie jede Zahl, einen Schnitt in der Zahlenreihe hervor, indem sie die Zahlenreihe in einen oberen und einen unteren Bereich teilt, nur daß beide Bereiche durch die Reihenzahl getrennt werden. Umgekehrt definiert jeder Schnitt der Zahlenreihe eine Reihenzahl, denn: sei s ein Begriff, durch den die Zahlenreihe in zwei Bereiche getrennt wird, in der Weise, daß von jeder rationalen Zahl angegeben werden kann, ob sie größer oder kleiner als s sei, wie das z. B. durch den periodischen Dezimalbruch geschieht, und sei $a < s$ und $b > s$, und denke man sich das Intervall $b - a = c$ in p_1 Teile geteilt und die Reihe gebildet:

$$a + \frac{c}{p_1}, \quad a + \frac{2c}{p_1} \cdots a + \frac{p_1 c}{p_1},$$

so ist entweder:

$$s = a + \frac{k_1 c}{p_1} \quad \text{oder} \quad a + \frac{k_1 c}{p_1} < s \quad \text{und} \quad a + \frac{(k_1 + 1) \cdot c}{p_1} > s.$$

Wir entwickeln auf diese Weise zwei Fundamentalreihen:

$$A = \left(a,\ a + \frac{kc}{p_1},\ a + \frac{kc}{p_1} + \frac{k'c}{p_1 p_2},\ a + \frac{kc}{p_1} + \frac{k'c}{p_1 p_2} + \frac{k''c}{p_1 p_2 p_3},\ + \cdots\right);$$

$$B = \left(b,\ a + \frac{(k+1)c}{p_1},\ a + \frac{kc}{p_1} + \frac{(k'+1)c}{p_1 p_2},\ \text{usw.}\right).$$

Die Differenzenreihe bildet eine Nullreihe, also $A = B$, und da

$$s > a_{n+k} \quad \text{und} \quad < b_{n+k}, \quad \text{so ist} \quad s = A = B.$$

Cantor sowohl als Dedekind glauben die Stetigkeit durch ihre Festsetzungen rein arithmetisch definiert zu haben. Es ist nicht schwierig zu zeigen, daß beide auf geometrischer Anschauung fußen.

14. Jede endliche Folge von Spezies, auf Glieder der durch die Reihenzahlen erweiterten Zahlenreihe erstreckt, führt wieder zu einem bestimmten Glied dieser Reihe.

Ihre Gesamtheit bildet also den Zahlenkörper der reellen Zahlen. Man könnte aber die Frage aufwerfen, ob etwa eine unendliche Folge von Reihenzahlen zu Neubildungen führen könnte.

Sei:

$$g_1 = (a_1^{(1)} \cdots), \ g_\nu = (a_1^{(\nu)} \cdots),$$

und:

$$g = (g_1,\ g_2,\ g_3,\ \cdots),$$

und $g_{n+k} - g_n < \varepsilon$ für jedes k, so ist:

$$g = (a^1_{(n+k)},\ a^2_{(n+k)} \cdots a^{(\nu)}_{(n+k)} \cdots),$$

also ist nach der Voraussetzung über g auch g definiert durch eine Fundamentalreihe.

15. Man identifiziert axiomatisch die Mannigfaltigkeit der reellen Zahlen mit der der Punkte einer Linie und bezeichnet sie als lineares Kontinuum. Cantor hat bewiesen, daß die Mächtigkeit des linearen Kontinuums von der der rationalen Zahlen bzw. der ganzen Zahlen verschieden ist, d. h. daß es nicht möglich ist, die Reihenzahlen insgesamt durch die natürliche Zahlenreihe abzuzählen. Beweisen läßt sich nur, daß, wenn g eine Zahl ist, Punkte existieren, deren zugehörige Maßzahlen von g um weniger als ε abweichen.

Cantor bewies nämlich den folgenden Satz:

Ist $a_1 a_2 a_3 \cdots$ eine einfach unendliche Reihe verschiedener reeller Zahlen, welche nach irgend einem Gesetz gebildet ist, so gibt es in jedem Intervalle $\alpha \cdots \beta$, in dem alle reelle Zahlen von $\alpha \cdots \beta$ nach der Größe geordnet vorzustellen sind, Zahlen, welche in der a-Reihe nicht vorkommen.

Man braucht nur den Fall zu betrachten, wo in jedem noch so kleinen Teilgebiet von $\alpha \cdots \beta$ Zahlen a vorkommen, weil sonst der

Satz eben dadurch richtig ist. Dann hat eine der Zahlen a in dem betreffenden Intervalle $\alpha \cdots \beta$ den kleinsten Index und eine zweite den nächst größeren; von diesen beiden Zahlen werde die kleinere mit α', die größere mit β' bezeichnet. Hiernach bestimmen α' und β' innerhalb $\alpha \cdots \beta$ ein Zwischenintervall $(\alpha' \cdots \beta')$, und es ist:

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta.$$

In gleicher Weise wird in $\alpha' \cdots \beta'$ ein zweites Intervall α'', β'' eingeschaltet, indem wir von den a nur den kleinsten Index innerhalb $\alpha'\beta'$ aufsuchen und das a mit dem nächst größeren. Mit dieser Bildung von Teilintervallen kann man nun unbeschränkt fortfahren. Aus diesem Verfahren, jedesmal den kleinsten und den nächstgrößeren Index aufzusuchen, folgt, daß innerhalb des Intervalles $(\alpha^\nu \cdots \beta^\nu)$ sich kein a finden kann mit einem Zeiger, welcher kleiner ist als der größere Zeiger der beiden Zahlen $\alpha^\nu \cdots \beta^\nu$, welche ja beide der a-Reihe angehören und das ist der Nerv des Beweises. Insbesondere kann a_ν nicht in dem Intervall liegen, denn zur Bildung des ν-Intervalles werden 2ν Zahlen der Zahlenreihe a erfordert; im denkbar günstigsten Falle wären dies die Zahlen $a_1, a_2 \cdots a_{2\nu}$, dann aber lägen sogar alle a unter dem Index 2ν, um so mehr also a_ν außerhalb des ν-Intervalles. Nun sind $\xi = [\alpha', \alpha'', \cdots]$ und $\eta = [\beta', \beta'', \cdots]$ zwei Reihenzahlen nach Satz 10 und sind nach Definition einander gleich, aber ξ kann keine Zahl der a-Reihe sein, denn a_ν liegt außerhalb $\alpha^{(\nu)} - \cdots \beta^{(\nu)}$ und ξ innerhalb.

16. Ich will hier die wichtigsten, die Hauptformen, der angeblich arithmetischen Einführung der Reihenzahlen angeben:

1) Die Weierstraßsche Art (nicht ganz zutreffend von E. Kossak, Programm des Werderschen Gymnasiums 1872 dargestellt); 2) die R. Dedekindsche; 3) die G. Cantorsche. Allen gemeinsam ist die im Wesen der Reihenzahl begründete Tatsache, daß sie eine wohl definierte unendliche Menge von der Mächtigkeit der Zahlenreihe an rationalen Zahlen erfordern. Ihr Unterschied liegt in der Art und Weise, wie die Menge mit der durch sie definierten Zahl verknüpft ist und in den Bedingungen, welche die Menge zu erfüllen hat, damit sie als Grundlage für die betreffende Zahlendefinition sich eigene.

Weierstraß: Es wird die Reihenzahl a definiert durch eine Menge positiver rationaler Zahlen a, die mit der Marke (a_ν) bezeichnet wird und welche die Bedingung erfüllt, daß, wie viele und welche auch von den a_ν in endlicher Anzahl summiert werden, die Summe immer unterhalb einer angebbaren Grenze bleibt. Hat man nun zwei solche Aggregate (a_ν) und (a_ν'), so zeigt sich, daß sich drei Fälle darbieten können: Entweder ist jeder n^{te} Teil der Einheit in beiden Aggregaten, sofern man ihre Elemente in hinreichender vergrößerungsfähiger endlicher Anzahl summiert, stets gleich oft enthalten, oder es

ist $\frac{1}{n}$ von einem gewissen n an in dem ersten Aggregat stets öfter enthalten als in dem zweiten oder drittens umgekehrt. Diesen Vorkommnissen entsprechend sind, wenn b und b' die durch die beiden Aggregate (a_ν) und (a_ν') zu definierenden Zahlen sind:

$$1)\ b = b', \quad 2)\ b > b', \quad 3)\ b < b';$$

vereinigt man die beiden Aggregate zu einem neuen (a_ν, a_ν'), so wird dadurch $b + b'$ definiert.

Bildet man aber aus den beiden Aggregaten (a_ν) und (a_ν') das neue Aggregat $(a_\nu \cdot a_\nu')$, in welchem die Elemente die Produkte aus allen a_ν in alle a_ν' sind, so wird dieses neue Aggregat Grundlage für bb'.

Man sieht, daß hier die Art und Weise, das Erzeugungsmoment, welches die Menge mit der durch sie erzeugten, bzw. definierten Zahl verknüpft, in der Summenbildung liegt; doch muß ganz besonders betont werden, daß nur die Summation einer endlichen Anzahl von rationalen Elementen a_ν zur Anwendung kommt und **nicht** etwa von vornherein die zu definierende Zahl b als die Summe a_ν der unendlichen Reihe (a_ν) gesetzt wird. Es wäre dies logisch falsch, weil vielmehr die Definition von Summe a_ν erst durch Gleichsetzung mit der schon vorher definierten fertigen Zahl b gewonnen wird.

Die Definition von Dedekind (Stetigkeit und Irrationalzahlen) setzt die Gesamtheit aller rationalen Zahlen als gegeben voraus und denkt diese in zwei Gruppen geteilt, einen oberen Bereich und einen unteren, derart, daß, wenn die Zahlen des unteren mit A_ν und die der oberen mit B_ν bezeichnet werden, stets $A_\nu < B_\nu$ ist. Eine solche Teilung nennt Dedekind einen Schnitt, bezeichnet ihn mit $(A_\nu \mid B_\nu)$ und ordnet ihm eine Zahl b zu. Vergleicht man zwei solcher Schnitte, so sind wieder drei Möglichkeiten vorhanden:

$$1)\ b = b_1, \quad 2)\ b > b_1, \quad b)\ b < b_1.$$

Der erste Fall findet, außer wenn b eine rationale Zahl ist, nur bei völliger Identität statt und darin liegt ein wirklicher und großer Vorzug der Dedekindschen Form, daß jeder Reihenzahl b nur ein einziger Schnitt entspricht, welchem Vorzug aber der viel größere Nachteil gegenübersteht, daß die für die Analysis entscheidenden konvergierenden Reihen sich niemals in der Form von „Schnitten“ darbieten, in welche sie mitunter mit großer Mühe gebracht werden müssen.

Der Vorzug der Cantorschen Form gegenüber der Weierstraßschen liegt vor allem darin, daß von vornherein die Vertretung der Reihenzahl $b = (a_\nu)$ durch irgend ein hinreichend fernes Glied klar

ist und daß infolgedessen $b \gtrless 0$ ist, wenn $\lim a_\nu \gtrless 0$ ist. Ferner in der bequemen Definition der sämtlichen vier Spezies; dann aber, und das ist der größte Vorzug, gestattet sie ohne weiteres, irrationale Zahlen zu definieren, deren a_ν selbst irrationale Zahlen sind, und so fort, z. B.:

$$\sin \frac{\pi}{2} x = \left(n \sum_{0}^{\nu} (-1)^m \frac{\left(\frac{\pi}{2} x\right)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right).$$

Die Operationen 3. Stufe.

XII. Abschnitt.

Potenzierung und Radizierung.

1. Wie aus der Addition die Multiplikation sich abzweigte und das Produkt, anfänglich nur die Summe von gleichen Summanden, zu einer selbständigen Zahlenform wurde, so entwickelt sich aus der Multiplikation die Potenzierung. Ein Produkt von n gleichen Faktoren, von denen jeder gleich a ist, wurde zur Abkürzung a^n genannt, a Grundzahl, n Exponent. Als Grundzahl kann jede reelle Zahl auftreten, als Exponent nur die Anzahlen von 2 inklusive an. Durch die Jahrhunderte, von den Arabern, von Jordanus an bis Neper und Jobst Bürgi, zieht sich die Betrachtung, daß die Exponenten eine arithmetische, die Potenzen eine geometrische Reihe bilden; jede der Reihen, heißt das, befolgt ein einfaches, durch die ganze Reihe hindurchgehendes Gesetz; das der Exponenten ist das der natürlichen Zahlenreihe, das der Potenzen lautet: Jedes folgende Glied geht aus dem vorhergehenden hervor durch Multiplikation mit demselben Faktor, nämlich a.

Wir erhalten daraus sofort die Formel $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, das Grundgesetz und — wie sich zeigen wird — das für die Potenzform charakteristische Gesetz. Ebenso einfach folgt:

$$(a^r)^s = a^{rs} \quad \text{und} \quad a^r : a^s = a^{r-s}.$$

2. Wir stoßen aber für die Divisionsregel auf dieselbe Beschränkung, welche wir bei der Subtraktion überwinden mußten. Die Reihe der Potenzen und die der Exponenten hat einen Anfang. Da die Exponenten eine Folge aus der natürlichen Zahlenreihe bilden, so bleibt ihr Gesetz erhalten, wenn wir die Reihe nach rückwärts fortsetzen durch Einstellung von 1, 0, -1, $-2 \cdots$ Soll das Gesetz der Potenzen und damit die daraus folgenden Rechnungsregeln er-

halten bleiben, so muß jedes folgende Glied der Reihe aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit a hervorgehen. Es muß also definiert werden:

$$a^1 = a^2 : a = a; \quad a^0 = a : a = 1; \quad a^{-1} = \frac{1}{a}; \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

Die Erweiterung rechtfertigt sich schon durch den Nutzen für die Dezimalbrüche.

3. a^r hat jetzt einen bestimmten Sinn für jedes ganzzahlige r; aber der Potenzbegriff ist in vier ganz getrennte Begriffe zerrissen und dabei ist a^r noch nicht erklärt für den Fall, daß r ein Bruch oder eine Reihenzahl ist. Wir könnten allerdings schon jetzt durch die Forderung, das wesentliche Gesetz der Potenzenreihe aufrecht zu erhalten, die passende Definition von $a^{\frac{p}{q}}$ finden. Indessen enthalten die bisherigen Sätze, da sie nicht formell auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten führen, keinen Zwang, den Potenzbegriff zu erweitern.

4. Wir erwähnen die Formeln:

$$a^r b^r = (ab)^r \quad \text{und} \quad a^r : b^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r,$$

wo $b \neq 0$, und ferner:

$$(-a)^{2r} = a^{2r}; \quad (-a)^{2r+1} = -(a^{2r+1}).$$

5. Die Radizierung: Die Gleichung $a^n = b$, in welcher a beliebig ist und n eine ganze Zahl bedeutet, ist durch die Definition in 2. in bezug auf b gelöst, d. h. wenn a und n gegeben, läßt sich b als bestimmte Zahl ermitteln. Man kann nun die Gleichung ebenso bei gegebenen n und b nach a aufzulösen versuchen; auch bei gegebenen a und b nach n, was wir aber vorläufig noch verschieben. Eine Zahl a, welche unter dem Exponenten n die Zahl b ergibt, heißt n^{te} Wurzel aus b, $(\sqrt[n]{b})$, b heißt Radikand, n Wurzelexponent. Der Wurzelhaken findet sich zuerst bei Adam Riese 1524, Stevin 1585 $\sqrt{③}$, Albert Girard, der für die Lehre von den Polygonen und vieles andere bedeutsame Mathematiker, schreibt 1629 $\sqrt[3]{}$, usw.; aber schon die Ägypter hatten ein dem unsrigen ähnliches Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$, ta genannt, für die zweite Wurzel, die Quadratwurzel.

Die Gleichungen $a^n = b$ und $a = \sqrt[n]{b}$ sind äquivalent, d. h. sie folgen auseinander, doch ist die zweite, solange bis die Existenz der Wurzel und ein Verfahren zur Berechnung nicht nachgewiesen sind, eine leere Form.

6. Ist $a^{-n} = b$ und $a = \sqrt[-n]{b}$, so ist $a^n = b^{-1}$ und $a = \sqrt[n]{b^{-1}}$; $\sqrt[0]{b}$ ist sinnlos, außer wenn $b = 1$ ist, und dann ist es unbestimmt; wir können daher die Radizierung mit Null verbieten und uns un-

beschadet der Allgemeinheit auf den Fall, wo n eine Anzahl ist, beschränken.

7. Hauptsatz: Wenn $a^n = c^n$ und a und c beide größer als Null sind, so ist $a = c$. Der Fall $n = 1$ erledigt sich von selbst. Die anderen Fälle veranlassen uns zum ersten Male, die n^{te} Potenz eines Binoms in Betracht zu ziehen. Wir sehen aus dem Multiplikationsgesetz sofort, daß $(a + b)^n > a^n$. Der Beweis ergibt sich freilich auch schon daraus, daß ein Produkt wächst, sobald ein Faktor wächst. Der Beweis zeigt, daß es höchstens eine positive $\sqrt[n]{\ }$ aus einer positiven Zahl gibt; auch wenn a und c beide kleiner als Null sind, gilt derselbe Satz.

8. Hieran schließt sich die Frage nach der Bestimmtheit von $\sqrt[n]{-b}$. Sei $n = 2r + 1$. Wenn $a^{2r+1} = -b$ ist, so ist $(-a)^{2r+1} = b$ und die Radizierung ist wieder auf positive Radikanden zurückgeführt. Es gibt daher nur höchstens eine negative Wurzel aus einer negativen Zahl, wenn n ungerade ist. Ist $n = 2r$, so ist sowohl a^{2r} als $(-a)^{2r} = (a^2)^r$, also positiv, und wir sehen, es existiert keine reelle Zahl, welche unter einem geraden Exponenten eine ungerade Zahl ergibt. Wir stehen daher vor der Wahl, entweder die Radizierung negativer Zahlen für gerade Wurzelexponenten zu verbieten, oder den Zahlbegriff zu erweitern. Man hat sich für das letztere entschlossen, eine Entscheidung, die vor allen Dingen durch den Erfolg gerechtfertigt ist. Vorläufig aber schließen wir negative Werte des Radikanden aus.

Wir können sogar, unbeschadet der Allgemeinheit, b auf ganze positive Zahlen beschränken. Denn wenn $b = \frac{p}{q}$, so ist:

$$b = \frac{p \cdot q^{n-1}}{q^n} \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{p \cdot q^{n-1}}}{q},$$

vorausgesetzt, daß $\sqrt[n]{b \cdot q^{n-1}}$ existiert.

9. Das Natürlichste zur Ausrechnung der $\sqrt[n]{b}$ oder zur Lösung der Gleichung $x^n = b$ wäre (vgl. Division), eine Tabelle der n^{te}-Potenzen zu entwerfen, welche den Überblick über den Verlauf der Funktion x^n gewähren würde, unter Einschränkung der Variablen x auf positive Werte. Diese Tabelle ist zwar wegen der unendlich vielen Werte des x^n unausführbar, aber wir können sie wenigstens für ganze Werte von x beliebig weit fortgesetzt denken. Wir würden aus solcher Tabelle z. B., wenn auch nicht die $\sqrt{2}$, so doch $\sqrt{1{,}96}$ als 1,4 entnehmen können. Jedenfalls tritt bei dieser Betrachtung die für die numerische Berechnung entscheidende Eigenschaft der Funktion x^n hervor, mit wachsendem positiven x beständig zu wachsen.

10. Hauptsatz: Die positive n-Wurzel aus einer ganzen positiven Zahl ist entweder eine ganze Zahl oder eine Reihenzahl.

Beweis: Sie kann kein Bruch sein; denn, denken wir $\sqrt[n]{b} = \frac{p}{q}$, so kann man p und q teilerfremd machen, und es wäre $p^n = q^n \cdot b$, d. h. dieselbe Zahl auf zwei wesentlich verschiedene Weisen in Primfaktoren zerlegbar. Weil die Funktion x^n mit wachsendem x beständig und, wie leicht zu zeigen, über jede Grenze wächst, so sind daher nur zwei Fälle möglich: entweder es findet sich eine ganze Zahl a, so daß $a^n = b$ ist, und dann ist $a = \sqrt[n]{b}$, oder es findet sich eine ganze Zahl a, so daß $a^n < b$ und $(a+1)^n > b$ ist. In diesem Falle ist $\sqrt[n]{b}$ keine ganze Zahl und kein Bruch. Sie kann daher, wenn überhaupt, so nur eine Reihenzahl sein zwischen a und $a+1$. Denken wir uns nun die Differenz zwischen beiden Grenzen, d. h. 1 in p gleiche Teile geteilt, wo p beliebig groß ist, und betrachten die Reihe:

$$\left(a + \frac{1}{p}\right)^n \cdots \left(a + \frac{p}{p}\right)^n,$$

so wächst diese beständig und über b hinaus, und es muß sich daher eine Zahl k finden, so daß $\left(a + \frac{k}{p}\right)^n$ dem unteren Bereich, $\left(a + \frac{k+1}{p}\right)^n$ dem oberen angehört. Denken wir uns das Intervall $\frac{1}{p}$ in p' gleiche Teile geteilt und betrachten die Reihe:

$$\left(a + \frac{k}{p} + \frac{1}{pp'}\right)^n \cdots,$$

so gibt es aus demselben Grunde eine Zahl k', so daß:

$$\left(a + \frac{k}{p} + \frac{k'}{p \cdot p'}\right)^n < b \quad \text{und} \quad \left(a + \frac{k}{p} + \frac{k'+1}{pp'}\right)^n > b$$

ist, usw. Wir entwickeln auf diese Weise zwei Fundamentalreihen:

$$a;\quad a + \frac{k}{p};\quad a + \frac{k}{p} + \frac{k'}{pp_1};\quad a + \frac{k}{p} + \frac{k'}{pp'} + \frac{k''}{pp'p''} \cdots;$$

$$a+1;\quad a + \frac{k+1}{p};\quad a + \frac{k}{p} + \frac{k'+1}{pp_1} \cdots;$$

Die Differenzen bilden eine Nullreihe, so daß nach XI, 7 beide Reihen dieselbe Grenze g besitzen, als welche ja jedes hinlänglich entfernte Glied eintreten kann; die eine Reihe nimmt immer ab, die andere immer zu. Die Reihen ihrer n Potenzen bilden nach XI, 10 zwei Fundamentalreihen mit der Grenze g^n, von denen die eine beständig nach b hin wächst, die andere fällt. Da b ja zwischen $\alpha_\nu{}^n$ und $\beta_\nu{}^n$ liegt, $\alpha_{\varrho+k} = \beta_{\varrho+k}$ also $\alpha_\nu{}^n = \beta_\nu{}^n$ ist, sind die Reihen der Differenzen $b - \alpha_1{}^n$, usw. und $b - \beta_1{}^n$ Nullreihen, also:

$$b = (\alpha_1{}^n \cdots) = (\beta_1{}^n \cdots) = g^n$$

und die $\sqrt[n]{\ }$ aus b ist in g gefunden.

11. Wir ersehen aus dem vorstehenden Existenzbeweis, daß es unendlich viele Reihen für $\sqrt[n]{b}$ gibt, aber alle diese Reihen sind nach XII, 7 einander gleich. Zur Kontrolle können wir die Gleichheit ausführlich nachweisen:

$$b - \alpha_{\nu+k}^{n} < \varepsilon; \quad b - \alpha_{\nu+k}'^{n} < \eta; \quad \alpha_{\nu+k}^{n} - \alpha_{\nu+k}'^{n} < \delta; \quad \alpha_{\nu+k}^{n} = \alpha_{\nu+k}'^{n};$$

$$a_{\nu+k} = \alpha_{\nu+k}';$$

folglich: $$\alpha = \alpha'.$$

12. $$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{ac}.$$

Beweis: Nach Definition des Produkts in XI, 10 gilt der Satz, daß die Reihenfolge der Faktoren beliebig ist auch für Reihenzahlen. Also ist:

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{c})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{c})^n = ac. \quad \text{q. e. d.};$$

oder wieder zur Übung im Rechnen mit Reihenzahlen:

$$\sqrt[n]{\alpha} = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots) \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{c} = (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \cdots);$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{c} = (\alpha_1 \gamma_1, \alpha_2 \gamma_2 \cdots);$$

$$(\alpha_{n+k} \cdot \gamma_{n+k})^n = a_{n+k} \cdot c_{n+k} = (a - \varepsilon) \cdot (c - \eta) = a \cdot c;$$

ebenso wird bewiesen, daß $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{\frac{a}{c}}$, außer wenn $c = 0$.

Kurz: Da die $\sqrt[n]{\ }$ eine ganze oder Reihenzahl ist, so gelten für sie alle Regeln der Rechnung. Man nennt diese Reihenzahlen, welche n^{te} Wurzeln aus positiven reellen Zahlen sind, algebraische Zahlen oder Irrationalzahlen.

13. Das für den Existenzbeweis durchgeführte Verfahren ist für die Berechnung zu zeitraubend. Wir können es erheblich verkürzen. Wir werden nur die numerische Berechnung der Quadratwurzel ausführlicher behandeln, da alle anderen sich von ihr nur durch den Zeitverbrauch unterscheiden und wollen das Verfahren gleich an einem Zahlenbeispiel durchführen. Sei $x^2 = 7$, $x = \sqrt{7}$, so finden wir aus der Tabelle der Quadratzahlen $2 < x < 3$. Statt nun beliebig mit eingeschalteten (interpolierten) Zwischenzahlen zu probieren, machen wir uns klar, daß die Funktion x^2, welche für $x = 2$ den Wert 4 hat, beständig wächst und daher die $\sqrt{2}$ eine solche Zunahme erleiden muß, die dem Quadrat 3 zuführt. Wir werden also veranlaßt, die Änderung der Funktion genauer in ihrer Abhängigkeit von der Änderung der Variablen zu betrachten und dadurch auf die Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, also wiederum, und diesmal sehr energisch, auf den binomischen Satz hingewiesen, der sich nach jeder Hinsicht als der natürliche Abschluß der elementaren Arithmetik und als Ausgangspunkt der höheren erweist. Hier muß

nun $4z + z^2 = z(4 + z) = 3$ sein und wir wissen, daß $0 < z < 1$ ist, also $4z < 3$, $z < \frac{3}{4}$ und $4z + 1 > 3$, $z > \frac{2}{4}$, wenn wir $z = \frac{5}{8}$ setzen und $\sqrt{7} = 2 + \frac{5}{8}$, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{8}$. Wollen wir genauer rechnen, so ermitteln wir zunächst die Zehntel, zwischen denen z liegt. Wir proben mit 0,6 und berechnen die Zunahme gleich $0{,}6 \cdot 4{,}6 = 2{,}76$, also ist der Wert der Funktion x^2 für $x = 2{,}6$ gleich 6,76. Der Wert 0,7 erweist sich schon zu groß, da die Zunahme $0{,}7 \cdot 4{,}7 = 3{,}29$ ist. Es bliebe noch 0,24 einzuholen. Also ist die Wurzel:

$$2{,}6 + z \quad \text{und} \quad 5{,}2z + z^2 = 0{,}24, \quad z < 0{,}1, \quad z^2 < 0{,}01,$$

also z zwischen:

$$\frac{0{,}24}{5{,}2} \quad \text{und} \quad \frac{0{,}23}{5{,}2};$$

setzt man $z = \frac{0{,}47}{10{,}4}$, so ist der Fehler kleiner als $\frac{0{,}01}{10{,}9}$ oder $< 0{,}001$. Wir finden jetzt 0,04 zu klein, 0,05 zu groß.

So fortfahrend sehen wir, daß wir der gesuchten Wurzel so nahe kommen können, als wir wollen. Wir entwickeln die beiden Fundamentalreihen, von denen die eine steigend, die andere fallend, sich der $\sqrt{7}$ als Grenze nähern. Die Annäherung kann in jedem Augenblick kontrolliert werden, wenn wir die Zehntel, Hunderstel usw. ermitteln. Ist a der gefundene Teil der Wurzel und $7 - a^2 = R$, so liegt die Zunahme stets zwischen R durch $2a$, und R vermindert um eine Einheit seiner letzten Dezimale dividiert durch $2a$.

14. Unser gewöhnliches Verfahren ist von dem geometrischen des Theon, oder vielmehr seiner Tochter, der durch Schönheit und Talent berühmten Hypatia, nicht verschieden, und das letztere ist unmittelbar anschaulich. Nebenstehende Figur 2 lehrt alles, was zu zeigen ist, sofort; nämlich, daß man für die beiden Rechtecke mit den Seiten a und z eins mit den Seiten $2a$ und z setzen kann, und statt $2az + z^2$ auch das eine Rechteck mit den Seiten $2a + z$ und z. Geometrisch vorgetragen macht das Quadratwurzelausziehen, das arithmetisch recht mühsam ist, den Jungen geradezu Spaß. Das, worauf es ankommt, nämlich, daß man unter provisorischer Vernachlässigung von z^2 gegen $2az$ die Wurzel unschwer, so genau als man will, berechnen kann, begreifen die Schüler fast sofort. Man quäle sie mit dem Algorithmus möglichst wenig, da er doch wenige Wochen darauf

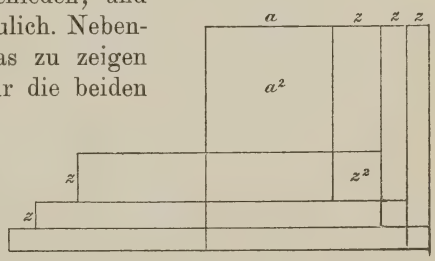

Fig. 2.

gegen die bequeme logarithmische Berechnung aufgegeben wird. Überhaupt sind es selten oder nie die eigentlichen mathematischen Gedanken, welche den Schülern Schwierigkeiten bereiten, sondern fast immer nur der Mechanismus und Algorithmus, und da haben sie meistens recht, weil sich die Beweise für die wirkliche Allgemeingültigkeit des Rechnungsverfahrens oft nur sehr schwer geben lassen (Simon, Methodik).

Man bespricht dann kurz die Kubikwurzel usw. und zeigt, daß sie analog die Formeln $(a+b)^3 \cdots (a+b)^n$, d. h. den Binom verlangen; man kann etwa zwei passend gewählte Kubikwurzeln auf zwei Dezimalen berechnen lassen. Den Algorithmus übt heute nicht leicht ein mathematisch gebildeter Lehrer ein.

15. Da $a^2 = (-a)^2$, so hat $\sqrt{a^2}$ außer a den Wert a'. Es tritt also hier bei dem einfachsten Fall der Radizierung schon die Mehrdeutigkeit auf; d. h. zum ersten Male, wenn man von $0 \cdot x = 0$ absieht, wird auf eine bestimmt gestellte Frage eine doppelte Antwort gegeben, und hierdurch ist die Radizierung von den vier Spezies scharf getrennt. Insofern sowohl a als a' quadriert a^2, bzw. b geben, werden gewöhnlich beide als $\sqrt{b}$ bezeichnet und nur ausnahmsweise durch die Vorzeichen + und − unterschieden. Die Interpretation des Gleichheitszeichens erleidet damit eine neue Erweiterung. Kommen auf einer oder beiden Seiten einer Gleichung Wurzelzeichen (Irrationalitäten) vor, so kann nur geschlossen werden, daß mindestens einer der Werte der linken Seite gleich einem der Werte der rechten Seite ist.

Die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ist ohne eine neue Erweiterung des Zahlkörpers nicht möglich, denn keine reelle Zahl gibt aufs Quadrat erhoben eine negative Zahl; aber für den Augenblick sehen wir von dieser ab, da die Probleme, welche auf eine Quadratwurzel mit einer negativen Zahl führen, die quadratischen Gleichungen, uns zu einer Erweiterung nicht zwingen, sondern erst die kubische Gleichung uns in die Zwangslage versetzt, wirklich mit Wurzeln aus negativen Zahlen zu operieren.

16. Wenn der Radikand die Form a^{rn} hat, so ist eine $\sqrt[n]{a^{rn}} = a^r$, da $(a^r)^n = a^{rn}$ ist, und unter vorläufiger Beschränkung auf positive a und positive Wurzeln gelangen wir zu dem Satz: Potenzen werden radiziert, indem man ihre Exponenten durch den Wurzelexponenten dividiert. Der Satz führt uneingeschränkt angewandt auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten und wir sind jetzt nicht bloß rein formal veranlaßt, den Potenzbegriff auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten zu erweitern.

Da kämpfen nun zwei Auffassungen — einerseits die historische, wonach $a^{\frac{p}{q}}$ definiert wird als $\sqrt[q]{a^p}$, und die formale, wonach $a^{\frac{p}{q}}$ zu

$\frac{p}{q}$ gehört, der p-Zahl in der Teilreihe $\frac{1}{q}$, und daher definiert werden muß als $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$. Ich bevorzuge in der Sekunda des Gymnasiums die formale. Die Reihe der Exponenten $\frac{0}{q}, \frac{1}{q} \cdots \frac{q}{q}$ usw. befolgt nach wie vor das Gesetz der Zahlenreihe: Konstanz der Differenzen. Die Reihe der Potenzen $a^{\frac{0}{q}}, a^{\frac{1}{q}}, a^{\frac{2}{q}} \cdots a^{\frac{q}{q}} \cdots$ muß, damit die Rechnungsregeln gültig bleiben, ebenfalls ihr Gesetz befolgen: Konstanz der Quotienten. Da $a^0 = 1$, so ist dieser Quotient $a^{\frac{1}{q}}$ selbst; sei $a^{\frac{1}{q}} = x$, so muß $a^{\frac{2}{q}}$ definiert werden als x^2 und $a^{\frac{q}{q}}$ als gleich $a^1 = a = x^q$, d. h. also $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$ und $a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p$. Und jetzt muß bewiesen werden, daß das so definierte $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ ist. Es ist aber

$$x^{pq} = x^{q \cdot p} = (x^q)^p = a^p, \quad \text{q. e. d.}$$

Die Umkehrung überlasse ich Ihnen.

17. Hiermit hat für positive Zahlen a und deren Wurzeln die Definition gebrochener Potenzen keine Schwierigkeit, wenn auch n eine Reihenzahl ist. Nur müßten wir den Beweis liefern, daß a^ε, wenn ε hinlänglich klein, von 1 nicht merklich verschieden ist.

Sei $\varepsilon = \frac{1}{n}$, wo n etwa 10^k ist, so ist $a^{\frac{1}{n}} > 1$, wenn $a > 1$ ist und z. B. $(1 + \beta)$, dann ist:

$$(1 + \beta)^n = a, \; a > 1 + \beta n; \quad \beta < \frac{a - 1}{n},$$

und da $a - 1$ fest und n beliebig groß gemacht werden kann, so kann $\beta < \eta$ gemacht werden, und es ist $a^{\lambda\nu}$ von $a^{\lambda\nu + k}$ nicht wesentlich verschieden. Am besten spricht man aber von Potenzen mit irrationalen Exponenten überhaupt nicht, sondern geht über zu:

XIII. Abschnitt.

Die quadratische Gleichung.

1. Die Quadratwurzelausziehung ist identisch mit der Auflösung der rein quadratischen Gleichung: $z^2 = c$. Ihre Lösung ist identisch mit der Auflösung der quadratischen Gleichung $2ax + x^2 = c - a^2$, wo $z = a + x$ und $x = z - a = \sqrt{c} - a$ ist.

Jede gemischt-quadratische Gleichung läßt sich auf die Form $x^2 + 2ax = b$ bringen, welche mit der obigen identisch wird, sobald wir $b = c - a^2$ setzen, also $c = a^2 + b$ und folglich:

$$x = z - a = \sqrt{a^2 + b} - a.$$

So einfach diese Lösung ist, so ist sie für die Untersekunda, wo der Pythagoras und der Potenzsatz geometrisch zu quadratischen Gleichungen zwingen, noch zu kompliziert. Es ist einfacher zu sagen, $x^2 + 2ax$ ist nicht das Quadrat des Monoms x, auch nicht des Binoms $x + a$; man kann es aber dazu machen, indem man die quadratische Ergänzung a^2 auf beiden Seiten addiert. $x + a$ ist $\sqrt{a^2 + b}$ und $x = -a \pm \sqrt{a^2 + b}$. An Problemen, wie von einem Rechteck ist Inhalt und Umfang gegeben, oder die Abschnitte einer Sehne von gegebenem Abstand in gegebenem Kreise zu finden, zeigt man, wie absolut nötig die Zweideutigkeit in der Natur ist. Andrerseits ist auch klar, daß wenn der Ausdruck unter der Wurzel negativ ist, dies ein Zeichen ist, daß das Problem unter dieser Angabe nicht möglich ist. Hier ist auch Gelegenheit, zuerst auf Maximums- und Minimumsaufgaben einzugehen. Typisch ist dafür die älteste Aufgabe, die schon bei Euklid vorkommt, das Rechteck aus Inhalt i und Umfang $2s$. Es ergeben sich für die Seiten $x = s + \varepsilon$ und $y = s - \varepsilon$; $s^2 - \varepsilon^2 = i$; i ist also Maximum für $\varepsilon = 0$, d. h. fürs Quadrat: $x = s + \sqrt{s^2 - i}$; $y = s - \sqrt{s^2 - i}$, also Maximum $i = s^2$, oder Minimum $s = \sqrt{i}$.

2. Nachdem in Obersekunda des Gymnasiums bzw. Untersekunda des Realgymnasiums die Logarithmenrechnung bereits geübt ist und die Schüler mit dem Funktionsbegriff dabei erheblich vertrauter geworden sind, muß auch die Behandlung der quadratischen Gleichung vertieft werden. Man sieht, daß die Lösung darauf herauskommt, statt x als Variable z einzuführen, also auf die Substitution $z = x + a$, wodurch wir für z die rein quadratische Gleichung $z^2 = c$ erhielten. Diese Substitution muß aber erzwungen werden. Die Normalform sei $x^2 + ax + b = 0$. Wir setzen für x ein: $z + \lambda$, wo λ ein sogenannter Parameter ist, d. h. eine Hilfsvariable, über die wir zweckentsprechend verfügen. Es ist ungefähr dasselbe Prinzip, mit dem heutzutage Festungen gewonnen werden: Man wirft möglich viel Menschen hinein, um die Festung schneller auszuhungern. Wir erhalten:

$$z^2 + z(a + 2\lambda) + \lambda^2 + a\lambda + b = 0;$$

setzen wir für λ: $-\frac{a}{2}$, so erhalten wir:

$$z^2 + b - \frac{a^2}{4} = 0; \quad z = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \sqrt{d};$$

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{d}; \quad x_2 = -\frac{a}{5} - \sqrt{d}.$$

Sieht man d als Variable an, so sieht man, daß die Parabel mit dem Parameter $\frac{1}{2}$ eine Übersicht über die Gesamtheit der reellen quadratischen Gleichungen gewährt.

Ist $d = 0$, so hat die Gleichung nur eine Lösung; ist $d < 0$, so hat sie keine reelle Lösung und Lösungen nur unter Zuhilfenahme von Zahlen von der Form: $\alpha + \beta \cdot \sqrt{-1}$ — komplexen Zahlen — über die wir bei Gelegenheit der Gleichungen 3. Grades ausführlicher handeln werden. Ist a fest und b variabel, so ist $\frac{a^2}{4}$ der größte Wert, das Maximum für b. Ist b fest und a variabel, so ist $\sqrt{2b}$ das Minimum für a.

3. Da die Wurzeln x_1 und x_2 Summe und Differenz derselben beiden Zahlen sind, so ist $x_1 + x_2 = -a$ und $x_1 \cdot x_2 = b$. Das Auffallende an diesen fundamentalen Gleichungen liegt nicht darin, daß sich x_1 und x_2 durch a und b ausdrücken lassen, da ja x_1 und x_2 Funktionen von a und b sind, sondern darin, daß, während x_1 und x_2 in komplizierter Weise von a und b abhängen, a und b von x_1 und x_2 in denkbar einfachster Weise abhängen. a und b sind, abgesehen vom Zeichen, die einfachsten symmetrischen Verbindungen, bzw. Funktionen der Wurzeln.

4. Ersetzt man in $f(x)$, der quadratischen Form, a und b durch x_1 und x_2, so geht $f(x)$ über in $x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2)$ oder in $(x - x_1)(x_1 - x_2)$. Die Form verwandelt sich also durch Adjunktion von x_1 und x_2 in ein Produkt, was auch immer x sei, und man sieht, daß die Summe $f(x)$ nur deshalb für x_1 und x_2 den Wert 0 hat, weil sie identisch ist mit einem Produkt von zwei Faktoren des 1. Grades. Die Gleichung 2. Grades $f(x) = 0$ vertritt die Stelle zweier Gleichungen 1. Grades:

$$x + \frac{a}{2} - \sqrt{d} = 0; \quad x + \frac{a}{2} + \sqrt{d} = 0.$$

Es ist wichtig, dies Resultat die quadratische Form betreffend, unabhängig von der Auflösung der quadratischen Gleichung zu zeigen.

Es sei v ein beliebiger, aber bestimmter Wert der Variablen, dann ist $f(x) - f(v)$, weil das konstante Glied wegfällt und $a^n - b^n$ durch $a - b$ teilbar ist, gleich $(x - v) \cdot Q$, wo Q für unsere Form 2. Grades gleich $x + v + a$ ist. Da $f(x) - f(v)$ Null ist, nicht nur wenn $x = v$, sondern auch wenn $Q = 0$ ist, d. h. für $x = \omega$, wo $v + \omega = -a$, so sieht man, daß die Form $f(x)$ denselben Inhalt erhält für je zwei Zahlen, deren Summen gleich $-a$ ist und nur für diese. Nur wenn v und ω gleich werden, d. h. für $x = -\frac{a}{2}$ nimmt die Funktion $f(x)$ den Wert $f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\left(\frac{a^2}{4} - b\right)$ nur einmal an. Ist $v = x_1$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, d. h. ein Nullwert der Funktion $f(x)$, so ist auch $\omega = x_2 = -a - x_1$ ein zweiter Nullwert und ein dritter ist ausgeschlossen.

5. Der Beweis des Satzes läßt sich noch vereinfachen und verallgemeinern. Sei $f(x)$ eine Form beliebigen Grades, z. B. n^{ten} Grades, so läßt sich $f(x)$ durch $x - v$ dividieren und man erhält:

$$f(x) = (x - v) \cdot Q + R,$$

wo Q eine ganze rationale Form oder Funktion vom höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade in x ist und R vom 0^{ten} Grade ist, d. h x gar nicht enthält. Ist $x = v$, so ist $x - v = 0$ und $f(v) = R$, also $R = f(v)$, also:

$$f(x) - f(v) = (x - v)\,Q.$$

Ist v eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, d. h. eine Nullstelle der Funktion, so ist $f(v) = 0$ und $f(x) = (x - v)Q$. Wir haben hier den wichtigsten Satz der Algebra. Ist v eine Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades $f(x) = 0$, d. h. eine Nullstelle der ganzen rationalen Funktion n^{ten} Grades $f(x)$, so ist $f(x)$ durch $x - v$ ohne Rest teilbar. Hieraus folgt, daß keine Gleichung mehr Wurzeln hat, als ihr Grad anzeigt; indem wir uns für jetzt auf die Form 2. Grades beschränken, folgt, da Q vom 1. Grade, daß, wenn ein x_1 existiert, für das Funktion $f(x) = 0$ ist, auch ein x_2 existiert: Wurzel von $Q = 0$, und daß $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ ist für jeden Wert des x oder identisch. Hieraus folgt, wenn man $x = 0$ setzt, $x_1 \cdot x_2 = b$ und für $x = 1 : x_1 + x_2 = -a$. Es macht keine Schwierigkeiten, diese Sätze zu verallgemeinern.

6. Man sieht, daß die Auffindung der Wurzeln identisch ist mit dem Problem, zwei Zahlen zu bestimmen, deren Summe und Produkt gegeben ist, sieht auch sofort die Zweideutigkeit des Lösungssystems und hat Veranlassung, Systeme von quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten zu lösen. Von Systemen mit drei Unbekannten nur die allereinfachsten, wie etwa:

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad x + y = z, \quad xy + yz + zx;$$

dann sind aber auch alle Lösungsysteme zu berücksichtigen.

Diese Systeme gehören in die Algebra, speziell in die Eliminationstheorie.

7. Man muß jetzt bemerken, daß die scheinbare Leichtigkeit der Auflösung der f^2 darauf beruht, daß die eigentliche Arbeit schon bei der Quadratwurzelausziehung geleistet worden ist. Bei der Repetition in Obersekunda oder Prima muß man die direkte Lösung unabhängig von der Wurzel durchführen und zeigen, daß zwischen beiden Algorithmen kein nennenswerter Unterschied ist.

8. Sei $y = f(x)$ eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades, also: $\sum_0^n a_i \cdot x^{n-i}$, dann handelt es sich darum, einen oder mehrere oder alle Werte des x zu ermitteln, für die y, d. h. $f(x)$, den Wert Null hat.

Man sieht, die Auflösung der algebraischen Gleichungen beliebigen Grades ebenso wie die der Gleichungen 1. Grades, der Divisions- und Subtraktionsgleichung, sind spezielle Fälle eines sehr allgemeinen Problems und dieses heißt Umkehrung des Funktionalverhältnisses. Es handelt sich hier darum, x so zu bestimmen, daß y den Wert Null, oder die einfachere Funktion $\varphi(x) = x^2 + ax$ den Wert $-b$ hat, d. h. also, x aus y zu bestimmen. Das heißt aber, x als Funktion von y betrachten. Dabei muß sich herausstellen, und darin lag der Unterschied der quadratischen Funktion von denen des 1. Grades, daß, während zu jedem x nur ein y gehört, zu jedem y — mit einer einzigen Ausnahme — zwei Werte des x gehören. Man sagt: y ist eindeutige Funktion von x und x zweideutige von y.

9. Der Begriff Funktion, der jetzt generaliter die Abhängigkeit einer Größe von einer anderen bezeichnet, hat im Laufe der Zeit mannigfaltige Änderungen erlitten. Ursprünglich Bezeichnung der Potenzen einer und derselben Grundzahl nannten Leibniz und nach ihm Bernoulli und Euler jede Größe y Funktion oder abhängig von einer anderen x, der Unabhängigen (d. h. variablen) oder des Arguments x, sobald für y ein analytischer Ausdruck vorlag, wie $y = ax^2 - b$ oder $y = \sin x - \cos x$ allgemein $y = f(x)$, durch welchen die Änderung des y an die des x gebunden war, und dehnten diese Bezeichnung auch auf den Fall aus, wo diese Bindung durch eine Gleichung bewirkt wurde, die, außer y und x, nur Konstanten enthielt, wie: $x^2 - 2axy + b = 0$, allgemein $\varphi(x, y) = 0$.

Im ersten Falle heißt y explizite Funktion, im zweiten implizite. Die Fourierschen Reihen (trigonometrischen), welche gestatten, eine willkürliche Zahl y darzustellen, auch wenn y in verschiedenen Teilen des Gebiets von x ganz verschiedenen Gesetzen gehorcht, zwingen dazu, den Begriff umzuprägen. Funktion einer reellen Veränderlichen x in einem gegebenen Gebiet oder Intervall von a bis b, d. h. zwischen $x = a$ und $x = b$, heißt jetzt jede Größe y, welche für jeden besonderen Wert, den x in seinem Gebiete annehmen kann, einen einzigen und bestimmten Wert hat, welcher durch den des x gegeben ist oder gefunden werden kann, gleichviel ob durch Rechnung, geometrische Konstruktion, Beobachtung oder sonst wie. So ist ein Dezimalbruch, dessen Stellen wir auswürfeln, Funktion der Anzahl der Würfe, während die Quadratwurzel von x erst nach Festsetzung des Zeichens zur Funktion von x wird.

10. Von den Funktionen sind die wichtigsten die stetigen oder kontinuierlichen. Das Argument x heißt stetig im Gebiet $a - b$, wenn es jeden Wert zwischen a und b, die Grenzen inklusive, annehmen kann. Eine Funktion y von x heißt stetig, wenn nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Zahl δ sich eine positive Zahl ε, Funktion von δ, finden läßt, so daß, wenn x sich um nicht mehr

als $\pm \varepsilon$ ändert, sich y um nicht mehr als $\pm \delta$ ändert. Man bringt seit langer Zeit, eigentlich schon seit dem Einmaleins, den funktionalen Zusammenhang durch Tabellen, deren es außerordentlich viele gibt, zum Ausdruck, auch mehr und mehr graphisch durch Kurven. Dabei ist aber zu bemerken, daß eine geometrische Darstellung durch Kurven nur möglich ist, wenn die Funktionskurve im allgemeinen in jedem Punkte eine bestimmte Richtung hat, d. h. das Verhältnis $\frac{\delta}{\varepsilon}$ sich überhaupt einer bestimmten Grenze nähert, d. h. ebenfalls Funktion von x ist. Das erste Beispiel einer stetigen, aber nicht differentiierbaren Funktion gab Riemann in seiner Habilitationsvorlesung von 1854, das berühmteste ist die Weierstraßsche Funktion (Crelle 79, Seite 269). Sehr einfach ist das Beispiel von H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen, Band II:

$$\varphi(x) = \varepsilon(x) + \sqrt{x - \varepsilon(x)},$$

wo $\varepsilon(x)$ die Legendresche Funktion von x, d. h. die größte in x enthaltene ganze Zahl bedeutet, und die Wurzel positiv ist, und x selbst nicht < 0.

Die Kurve $y = \varphi(x)$ besteht aus lauter kongruenten Parabelstücken. $y' = \sqrt{\vartheta}$; ϑ zwischen 0 und 1, und hat für jeden ganzzahligen Wert eine Ecke, an der die Parabelstücke aneinander stoßen. Es ist:

$$\varphi(1) = 1; \quad \varphi(1 + \delta) = 1 + \sqrt{\delta}; \quad \frac{y - y_1}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{\delta}},$$

also wenn $\delta = 0$, über jedes Maß groß.

Verdichtet man diese singulären Stellen nach einem bekannten Weierstraßschen Prinzip, so entsteht die Funktion:

$$f(x) = \sum_n \frac{\varphi(2^n x)}{2^n 2^n},$$

wo n alle ganzen Zahlen von 1 bis unendlich durchläuft. Sie ist für den Bereich von 0 bis ∞ eine eindeutig erklärte stetige Funktion, welche beständig mit x wächst. Doch lassen sich in jedem noch so kleinen Intervall x bis $(x + \eta)$ unzählig viele Werte x' angeben, für welche $\frac{f(x' + h) - f(x')}{\delta}$, wo h vom positiven her sich der 0 nähert, über jedes Maß wächst. Diese Funktion ist also nicht graphisch darstellbar.

11) Aus der tabellarischen Darstellung ergibt sich nun der Satz, der das Umkehrungproblem ganz allgemein löst:

Wenn y im Gebiet des x von a bis b von A bis B stetig und gleichändrig oder **monoton** ist (d. h. beständig wächst oder beständig fällt), so ist die funktionale Beziehung umkehrbar, d. h. zu jedem Wert C des y zwischen A und B läßt

sich mittels des Grenzverfahrens ein und nur ein Wert c des x zwischen a und b berechnen, so daß $f(c)$ gleich C im erweiterten Sinne des Gleichheitsbegriffes ist, d. h. daß $f(c) - C$ dem absoluten Betrage nach nicht größer als δ. Der Beweis wird genau wie in XII, 10 geführt, am bequemsten durch fortgesetztes Halbieren des Intervalles.

12. Wir wenden uns zurück zu $f(x) = x^2 + ax + b$. Wir beweisen, die Wurzeln sind, wenn a und b ganze Zahlen, entweder ganze Zahlen oder Reihenzahlen. Voraussetzung: $\frac{p}{q}$ ist eine Wurzel und p und q teilerfremd, so müßte $p^2 = -q(ap + bq)$ den Teiler q haben. Wir untersuchen nur die Funktion $x^2 - ax + b$, weil sie durch Verwandlung von x in $-x$ in $x^2 + ax + b$ übergeht. Nimmt x beständig zu von $-\infty$ bis $\frac{a}{2}$, so nimmt y ab von ∞ bis $-\left(\frac{a^2}{4} - b\right)$, es hat für $x = \frac{a}{2}$ seinen kleinsten Wert. Denn wenn x von $\frac{a}{2}$ bis ∞ wächst, so wächst die Funktion, weil ihre wesentliche Zunahme $\varepsilon(2x - a)$ jetzt fortwährend größer als Null ist und ε^2 gegen ε verschwindet. Die Funktion ist für jeden Wert des x stetig und differentiierbar, also auch graphisch darstellbar, nämlich durch eine vertikal gestellte Parabel. Sie hat zwei Intervalle zum Unterschied von den Funktionen $x + a$ und ax, das eine von $x = -\infty$ bis $-\frac{a}{2}$, in dem die Funktion monoton und stetig fällt von $+\infty$ bis $-\left(\frac{a^2}{4} - b\right)$, das andere Intervall von $x = +\frac{a}{2}$ bis $+\infty$, in dem sie von $-\left(\frac{a^2}{4} - b\right)$ bis ∞ wächst, gleichändrig und stetig. Wenn wir den Minimalwert zu beiden Intervallen rechnen, so nimmt die Funktion jeden Wert zweimal an. Ist nun $-\left(\frac{a^2}{4} - b\right) < 0$, also $d > 0$, so gibt es in jedem Intervall einen Wert des x, für den $f(x)$ gleich Null ist, den wir durch das Grenzverfahren berechnen können. Falls $d = 0$, also auch $-d = 0$, so sind beide Wurzeln gleich $\frac{a}{2}$, $f(x)$ ist $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$. Wir sagen aber in diesem Falle: Die Wurzel $\frac{a}{2}$ ist eine doppelte Wurzel, da wir den Wert $\frac{a}{2}$ zu beiden Intervallen rechnen.

13. Das Grenzverfahren läßt sich genau wie bei der Gleichung $x^2 - c = 0$ abkürzen. Wir nehmen als Beispiel:

$$x^2 - 12x + 19 = 0; \quad x = 10 \text{ zu klein}, \quad f(x) = -1;$$

$$x = 11 \text{ zu groß}, \quad f(x) = x(x - 12) + 19 = +8; \quad x = 10 + z;$$

$$\text{Zunahme } z(2 \cdot 10 - 12) + z^2; \quad f(x) - f(10) = 1;$$

$$z < \frac{1}{2 \cdot 10 - 12} < \frac{1}{8}; \quad z = \frac{1}{10};$$

$$\text{Zunahme } \frac{1}{10}(2 \cdot 10 - 12 + z) = 8{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}81, \quad \text{Rest } 0{,}19;$$

$$\text{Zunahme } z(2 \cdot 10{,}1 - 12) + z^2, \text{ usw.}$$

Man sieht, das Verfahren bleibt absolut dasselbe wie bei der Quadratwurzelausziehung, nur, daß nach der Verdoppelung zum jedesmaligen Divisor — 12 dazukommt.

XIV. Abschnitt.

Der Logarithmus.

1. Historisch: Der Gedanke, die arithmetische Reihe der Exponenten einer positiven Grundzahl a mit der geometrischen ihrer Exponenten in Korrespondenz zu bringen, und so die komplizierten Rechnungsarten: Multiplikation, Division, Potenzierung und Radizierung um je zwei Stufen zurückzuschrauben, läßt sich von Archimedes über Jordanus Nemorarius, Chuquet, Luca Paciuola Stifel bis Jobst Bürgi und Neper fast ununterbrochen verfolgen. Aber um den Gedanken durchzuführen, alle (positiven) Zahlen als Potenzen ein und derselben Grundzahl anzusehen, mußte erst die Masse der Potenzen verdichtet werden. Es mußte erst Chuquet negative Potenzen und wunderbarerweise vor ihm der Bischof Oresme etwa um 1350 gebrochene Exponenten einführen, die allerdings erst wieder bei Albert Girard 1625 und dann vollständig bei Newton auftauchen. Die heutige systematische Darstellung danken wir Eulers klassischer Introduktion und noch mehr seiner berühmten elementaren Algebra, die sogar in Reclam-Ausgabe erschienen ist.

2. Wie wir $a^n = c$ nach c und nach a aufgelöst haben, können wir diese Gleichung auch nach n auflösen; dann heißt n der Logarithmus der Zahl oder des Numerus c im System mit der Basis a. Das Wort Logarithmus ist von Neper eingeführt, dessen *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, die erste gedruckte Logarithmentafel, 1613 in Edinburgh erschien, da Jobst Bürgi zur Drucklegung nicht zu bewegen war. Das Wort bezieht sich auf die Proportionalität der aufeinander folgenden Numeri: *„Numerorum proportionalium aut quantitatum sunt aequidistantes logarithmi“* (Mantisse: Wallis). Der Begriff der Basis findet sich zuerst bei Briggs. Wir schreiben $n = a \log c$ und lassen, wenn keine Verwechselung zu befürchten, die Basis a weg.

3. In Obersekunda, wo man mit der Logarithmenrechnung beginnt, muß zunächst die Potenzierung vollständig repetiert werden, am

besten jetzt vom rein formalen Standpunkt. Es wird dann zum Schlusse zum erstenmal gezeigt, daß, so zerrissen der Begriff ist, ein gemeinsames Band besteht in der Funktionalgleichung:

I. $$f(x)f(y) = f(x+y).$$

Man beweist den Satz:

Ist $f(x)f(y) = f(x+y)$ für jeden beliebigen Wert des x und y und hat $f(1)$ einen bestimmten Wert $\neq 0$, so ist $f(x) = [f(1)]^x$ für jeden Wert des x, für den die Potenz erklärt ist. Zunächst leitet sich aus I ab:

II. $$[f(x)]^n = f(nx),$$

worin n eine Anzahl ist, dann folgt, daß $f(0) = 1$ ist, ferner, daß $f(z) : f(y) = f(z-y)$ und aus II, daß $f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{f(p)}$, d. h. also die vier Potenzregeln. Setzt man in II:

$$x = 1 \quad \text{und} \quad f(1) = a = a^1,$$

so ist $f(n) = a^n$, also der Satz richtig für $n = 1, 2, 3 \cdots$, und da $f(0) = 1 = a^0$, auch für $n = 0$; dann folgt aus 1:

$$f(x)f(-x) = f(0),$$

also:

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}; \quad f(-n) = \frac{1}{a^n} = a^{-n},$$

und letztens:

$$\left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = f(p) = a^p, \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

4. Wir setzen voraus, daß $a > 0$ und $\neq 1$, ja aus Bequemlichkeit sogar, daß $a > 1$ ist. Als Existenzbeweis des Logarithmus genügt zunächst die Annahme von $a = 10$ und der schon gegebene Nachweis, daß $a^{\frac{1}{n}}$, wenn n hinlänglich groß ist, so dicht an 1 herangedrängt werden kann, als man will. Setzt man $n = 10^6$, so sieht man, daß die Potenzen von 10, welche nach $\frac{1}{n}$ fortschreitet: $10^{\frac{1}{10^6}}$, $10^{\frac{2}{10^6}}$ usw. ein hinlänglich dichtes Netz stets wachsender Zahlen bilden, in dessen Maschen jede vorgegebene positive Zahl gefangen wird. Damit ist ein für diese Stufe genügender Existenzbeweis gegeben. Zur numerischen Berechnung des Logarithmus bedient man sich zunächst des einfachen Verfahrens der fortgesetzten Quadrierung, d. h. Halbierung des Intervalles, welches schon Briggs anwandte.

Beispiel: $10^x = 3; \quad 0 < x < 1;$

$10^{2x} = 9, \; 0 < 2x < 1, \; 0 < x < 0{,}5; \quad 10^{4x} = 81, \; 0 < 4x < 2;$

$$0{,}25 < x < 0{,}5; \quad 10^{8x} = 6561, \quad 3 < 8x < 4, \quad 0{,}375 < x < 0{,}5;$$
$$10^{16x} = 42{,}986{,}121; \quad 10^{32x} \{ 16 \cdot 10^{14}; \quad 10^{64x} \{ 10^{31}; \quad 30 < 64x < 31;$$
$$x \{ 61 : 128 = 0{,}477 \cdots,$$

während die fünfstellige Tafel 0,47712 zeigt.

5. Der strenge Existenzbeweis macht ebenfalls keine Schwierigkeiten.

Setzen wir $a > 1$ voraus, so ist schon bewiesen, daß a^x mit wachsendem x beständig wächst, und zwar wächst es, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, von 0 bis $+\infty$, denn:

$$a^n = (1+p)^n > 1 + np > 10,$$

sobald:

$$n > \frac{9}{p} \quad \text{und} \quad a^{ns} > 10^s \quad \text{und} \quad a^{-ns} < \frac{1}{10^s}.$$

Es muß nur noch gezeigt werden, daß a^x auch stetig in dem XIII, 10 definierten Sinne wächst. Es ist $a^{x+\varepsilon} = a^x(a^\varepsilon - 1)$; sei $\varepsilon = \frac{1}{n}$, so ist zu zeigen, daß bei gegebenem beliebig kleinem η das $a^x\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ kleiner als η gemacht werden kann.

Wenn $a > 1$, so ist:

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \tau; \quad (1+\tau)^n = a;$$

also:

$$1 + n\tau < a, \quad \tau < \frac{a-1}{n} \quad \text{oder} \quad a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

Wenn also $\frac{a-1}{n} < \frac{\eta}{a^x}$, d. h. $n > \frac{a^x(a-1)}{\eta}$, bzw. $\varepsilon < \frac{\eta}{a^x(a-1)}$, so ist $a^{x+\varepsilon} - a^x < \eta$.

Die Funktion a^x ist also gleichändrig und stetig zwischen $x = -\infty$ und $x = +\infty$, und es gehört zu jedem Wert der Funktion zwischen 0 und $+\infty$ ein durch eine Reihenzahl zu ermittelnder Wert des x, d. h. zu jedem positiven Numerus gehört ein Logarithmus.

6. Anders ausgedrückt: es lassen sich jetzt alle positiven Zahlen als Potenzen der positiven Zahl $a > 1$ darstellen. Hat man den Verlauf der Funktion a^x in eine tabellarische Übersicht gebracht oder in eine Logarithmentafel, so gehen die vier Potenzregeln in die vier Logarithmenregeln über:

$$\lg(pq) = \lg p + \lg q; \quad \lg \frac{p}{q} = \lg p - \lg q;$$
$$\lg p^n = n \lg p; \quad \lg \sqrt[n]{p} = \frac{1}{n} \lg p.$$

Die Logarithmen bürgerten sich erst ein, als Neper auf den Rat von Briggs 10 zur Grundzahl machte. Diese Grundzahl hat

den Vorteil: a) das man die Ganzen der Logarithmen, die Charakteristik (Kennziffer) sofort erkennen kann, da sie, wenn die Numeri dezimal geschrieben sind, mit der Ordnungszahl der höchsten geltenden Ziffer übereinstimmt und b) und das ist der Hauptvorteil, dieselbe Mantisse gilt für alle Zahlen, die sich nur durch die Stellung des Komma unterscheiden.

7. Historisch: Den entscheidenden Anstoß gab Michael Stifel in seiner *Arithmetica integra* von 1544, Buch I, S. 35, der die arithmetische Reihe der Exponenten, das Wort stammt ebendaher, mit der geometrischen der Potenzen, wie schon vor ihm Chuquet und vor beiden Archimedes in seinem Sandzähler, in Korrespondenz setzte. Stifel sprach es an der angeführten Stelle ganz klar aus, daß auf diese Weise die Rechnungsarten der dritten und vierten Stufe in die der ersten und zweiten Stufe übergehen. Seine Bemerkungen druckte Simon Jakob im Rechenbuch von 1565 ab, und dies Buch las Jobst Bürgi, der zwischen 1603 und 1611 die Arbeit vollzog, ein hinlänglich dichtes Netz von Numeris zu entwerfen, indem er zu den Logarithmen $10 \cdot 20 \cdot 30 \cdots$ die Potenzreihe bildet: $10^8(1{,}0001^1, 1{,}0001^2 \cdots$ usw., es sind also Tafeln, die man heute Antilogarithmentafeln nennt. Der Nepersche Kanon ist eigentlich eine Tafel der Logarithmen des Sinus, Kosinus, Tangens; er addiert nicht $\frac{1}{10000}$, sondern subtrahiert $\frac{1}{1000000}$. Weder die Bürgischen noch die Neperschen Logarithmen sind natürliche Logarithmen. Henry Briggs hat das Verdienst, dekadische Logarithmen einzuführen, er veröffentlichte im Jahre 1617, dem Todesjahre Nepers, das erste Tausend achtstelliger und 1629 in der *Arithmetica logarith.* die vierzehnstelligen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 20000 und 90000 bis 100000. Die Lücke füllte der holländische Buchhändler und Mathematiker Adrian Vlacq aus, der in einer sogenannten zweiten Auflage der *Arithmetica* die Briggschen Logarithmen auf zehn Stellen und die fehlenden von 20000 bis 90000, außerdem die direkten Logarithmen der Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens, Sekans und Kosekans gab. Auf Vlacq gehen eigentlich alle späteren Tafeln zurück, von denen besonders die großen Vegaschen siebenstelligen Tafeln von 1783 noch Erwähnung verdienen. (Bei Vlacq noch 171 Fehler, bei Vega nur noch fünf in den sieben ersten Dezimalen.) Von Vega rührt der praktische Stern her.

XV. Abschnitt.

Der binomische Satz.

1. Die Radizierung sowohl wie die Logarithmisierung weisen auf die Formel $(a+b)^n$ hin, die für die Spezialfälle $n = 2, 3, 4$ schon den Hellenen bekannt war und langsam weiter entwickelt wurde. Die Regel über die Multiplikation einer Summe ergibt:

$$(x+a)^n = c_0^n x^n a^0 + c_1^n x^{n-1} a^1 + \cdots c_k^n x^{n-k} a^k \cdots + c_n^n x^0 a^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k^n x^{n-k} a^k,$$

wo die c ganze Zahlen sind, welche von n und k abhängen; man kann diese Binomialkoeffizienten rein arithmetisch als explizite bzw. independente Funktionen von n und k bestimmen. Es ist:

$$c_0^n = 1 = c_n^n,\ c_k = c_{n-k},\ c_k^n + c_{k-1}^n = c_k^{(n+1)}.$$

Diese Formel genügt, um sukzessiv sehr schnell die Koeffizienten zu bestimmen. Durch das sogenannte Pascalsche Dreieck, das Pascalsch heißt, weil es sich schon bei Stifel findet:

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1,

und es läßt sich daraus der Ausdruck für c_k^n unschwer ableiten. Bei genauer Überlegung tritt aber die Bedeutung des Binomialkoeffizienten direkt hervor: c_k^n zählt, wie oft das Glied $x^{n-k}a^k$ gebildet wird durch Auswahl von je $n-k$ Gliedern x und k Gliedern a immer aus je einem Faktor. Die Abzählung wird durch die Unterschiedslosigkeit der Faktoren erschwert; man gibt deshalb den Faktoren a Nummern von 1 bis n und sieht, daß x^{n-k} multipliziert ist mit der Summe der Kombinationen der a zu je k. Man sieht, c_k^n zählt, wie viel elementar verschiedene Auswahlen sich aus den n Elementen a zu je k treffen lassen.

Wir müssen jetzt die notwendigsten Formeln aus der Kombinatiorik, der Zählung von Zählungen, aufstellen.

2. Es kann zunächst gefragt werden, auf wie viel verschiedene Arten die Menge n gezählt werden kann oder, was dasselbe ist, wie viel Anordnungen — Permutationen — sich von n Elementen bilden lassen. Die Anzahl sei P_n, so ergibt sich sofort die Funktionalgleichung: $P_n = n \cdot P_{n-1}$, da das n-Element in jeder der P_{n-1} Formen von $n-1$ Elementen n Plätze einnehmen kann, und da $P_1 = 1$, so ist $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$ gelesen n Fakultät und nach Kramp (*Arithmetica universalis* 1808) $n!$ bezeichnet.

Werden aus den n Elementen Auswahlen zu je k getroffen, so ergibt sich die Funktionalgleichung der Variationen k Klasse:

$$v_k^{(n)} = v_{k-1}^{(n)} \cdot (n - (k-1)),$$

und da $v_1{}^n = n$, so ist:

$$v_k^{(n)} = n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = [n\,|\,k],$$

gelesen n neben k:

$$k! = [k\,|\,k] \quad \text{und} \quad [n\,|\,n+1] = 0,$$

$$v_k{}^n = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Wird schließlich die Anzahl der elementar verschiedenen Formen von n Elementen zu je k, der Kombinationen im engeren Sinne verlangt, so erhält man dieselbe durch den Satz:

$$v_k^{(n)} = c_k^{(n)} \cdot P_k, \quad \text{also} \quad c_k{}^n = \frac{[n\,|\,k]}{[k\,|\,k]} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k} = \frac{[n\,|\,k]}{k!},$$

gelesen: n über k seit Euler, auch n_k gelesen n tief k mit Abel, die *Acta mathematica* schreiben Γn, die Engländer $\llcorner n$.

3. Aus der Bedeutung von n_k als Kombinationszahl ergeben sich ohne Rechnungen:

(1) $$n_k = n_{n-k};$$

(2) $$n_k + n_{k+1} = (n+1)_k$$

und (3) die Verallgemeinerung von (2):

(3) $$(r+s)_k = r_k s_0 + r_{k-1} s_1 + \cdots + r_{k-k} s_k = \sum_{n=0}^{n=k} r_{k-p} s_p.$$

Die Formel (1) gestattet den Bereich der Funktion n_k zu erweitern, indem wir festsetzen $n_0 = 1$, $0_0 = 1$, $n_{-k} = 0$. Lassen wir k auf ganze Zahlen beschränkt, so behält n_k für jeden den Rechnungsregeln unterworfenen Wert des n einen eindeutigen Sinn, und wir müssen Formel (3) und damit auch (2) arithmetisch für jeden Wert der Zahlen r und s beweisen. Die Formel ist äquivalent mit der Formel, die man erhält, wenn man die Gleichung mit $k!$ multipliziert:

$$[(r+s)\,|\,k] = \sum_0^k [r\,|\,k-p][s\,|\,p]k_p,$$

wo r und s beliebig und k eine Anzahl ist.

Da die Gleichung für $k = 1$ und $k = 2$ ohne weiteres gilt, so beweist man sie durch den Schluß von n auf $n+1$ mittels des Kunstgriffes $r + s - k$ zu zerlegen in $r - (k-p)$ und $s - p$, also was nicht uninteressant ist; es wird jedes Glied auf der rechten

Seite auf verschiedene Weise multipliziert, aber so, daß es doch $r+s-k$mal genommen wird wie erforderlich, da:

$$[n\,|\,k+1] = [n\,|\,k](n-k).$$

Man hat somit:

$$[(r+s)\,|\,k+1] = \sum_0^k [r\,|\,k+1-p][s\,|\,p]k_p + \sum_0^k [r\,|\,k-p][s\,|\,p+1]k_p$$

$$= \sum_0^{k+1} [r\,|\,k+1-p][s\,|\,p]k_p + \sum_0^{k+1} [r\,|\,k+1-p][s\,|\,p]k_{p-1}$$

$$= \sum_0^{k+1} [r\,|\,k+1-p][s\,|\,p](k+1)_p, \text{ q. e. d.}$$

4. Der Binom nimmt jetzt die Form an:

$$(x+a)^n = \sum_0^n (n_k) x^{n-k} a^k,$$

und da zunächst n als Anzahl vorausgesetzt ist, also $n_{n+p} = 0$, so können wir auch schreiben:

$$(x+a)_n = \sum_0^\infty n_k x^{n-k} a^k.$$

Man tut gut, die Formel durch den Schluß von n auf $n+1$ noch elementarer zu beweisen. Es ist:

$$(x+a)^{n+1} = \sum_0^\infty n_k x^{n+1-k} a^k + \sum_0^\infty n_k x^{n-k} a^{k+1}.$$

Da wir in der zweiten Reihe als allgemeines Glied so gut das k^{te} wie das $(k+1)^{\text{te}}$ nehmen können und $n_{-1} = 0$ ist, so hat man:

$$(x+a)^{n+1} = \sum_0^\infty n_k x^{n+1-k} a^k + \sum_0^\infty n_{k-1} x^{n+1-k} a^k$$

$$= \sum_0^\infty (n_k + n_{k-1}) x^{n+1-k} a^k = \sum_0^\infty (n+1)_k x^{n+1-k} a^k.$$

Der Binom bewiesen durch vollständige Induktion gilt nun für jedes n, das durch Zählen erreicht werden kann, also für den Fall, daß die linke Seite eine Potenz im ursprünglichen Sinne ist; x und a können beliebig sein, nur müssen sie den Regeln der Rechnung gehorchen.

5. Nun geht man die Erweiterungen des Potenzbegriffes der Reihe nach durch:

$$n = 1: \quad (x+a)^1 = x + a.$$

Die rechte Seite:

$$1_0 x^1 a^0 + 1_1 x^0 a^1 = x + a;$$

der Satz bleibt gültig;

$$n = 0 : (x + a)^0 = 1, \quad \sum_0^\infty \cdots = 0_0 x^0 a^0 = 1.$$

Der Satz gilt noch immer. Jetzt $n = -1$: die linke Seite $\frac{1}{x+a}$, die rechte Seite $\sum_0^\infty (-1)_k x^{-1-k} a^k$ gibt eine unendliche Reihe.

Wir vereinfachen zunächst die Formel etwas; da

$$x + a = x\left(1 + \frac{a}{x}\right) = x(1 + z),$$

so ist der Binom { mit der einfachen Formel:

$$(1 + z)^n = \sum_0^\infty n_k z^k.$$

Für $n = -1$ geht die linke Seite über in $\frac{1}{1+z}$, die rechte Seite in $\sum_0^\infty (-1)^k z^k$, d. h. es ist die Grenze der Reihe:

$$1,\ 1 - z;\quad 1 - z + z^2;\quad 1 - z + z^2 - z^3 \cdots.$$

Es fragt sich, ob diese Grenzen als Zahl der Zahlenreihe existiert, d. h. ob die Reihe eine Fundamentalreihe. Es ist:

$$a_{r+k} - a_r = \pm z^r (1 - z + z^2 \cdots \pm z^{k-1}),$$

daher $a_{r+k} - a_r$ dem absoluten Betrage nach $<$ als:

$$|z|^r (1 + |z| + \cdots + |z|^{k-1}), \quad \text{d. h.} < z^r \left(\frac{1 - |z|^k}{1 - |z|}\right).$$

Wir sehen, sobald $|z| < 1$, ist:

$$a_{r+k} - a_r < \frac{|z|^r}{1 - |z|}$$

und kann mit hinlänglich großem $r < \varepsilon$ gemacht werden; also hat, wenn $|z| < 1$, die Reihe eine Grenze g als Reihenzahl; die Zahl $\frac{1}{1+z} = \gamma$ kann als die Reihenzahl:

$$\frac{1 - z}{1 + z};\quad 1 - z + \frac{z^2}{1+z};\quad 1 - z + z^2 - \frac{z^3}{1+z};\ \cdots$$

angesehen werden, deren Glieder alle $= \gamma$ sind und $\gamma - g$ ist eine Nullreihe, da:

$$a_k - a_k' = (-1)^{k-1} \frac{z^k}{1+z} < \varepsilon,$$

wenn $|z| < 1$: also:

$$g = \gamma = \frac{1}{1+z}.$$

Der Binom gilt also für $n = -1$, aber mit der Bedingung, daß $|z| < 1$, d. h. daß die Entwicklung von $(+a)^n$ nach steigenden Potenzen des kleineren Summanden fortschreitet. Sobald $|z|$ nicht wirklich < 1, werden alle Schlüsse, auf die der Beweis sich gründet, hinfällig. Die Reihe der Differenzen wird, wenn $|z| > 1$, dem absoluten Betrage nach immer größer, die Reihen $\sum_0^\infty$ divergieren.

6. Man erleichtert den Schülern die Sache, wenn man statt z einführt $-\varrho$ und in genau gleicher Weise die Gleichheit von $\frac{1}{1-\varrho}$ und $\sum_0^\infty \varrho^k$ begründet.

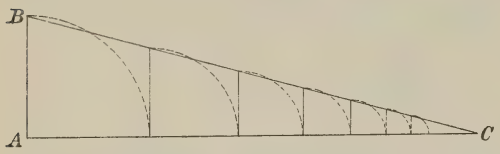

Fig. 3.

Man kann den Beweis auch geometrisch führen.

Man sieht sofort (Fig. 3), daß, wenn:

$$\varrho < 1 \text{ ist, } AC = \sum_0^\infty \varrho^k$$

und:

$$\frac{AC}{AC-1} = \frac{1}{\varrho}, \quad \text{also} \quad \frac{AC}{1} = \frac{1}{1-\varrho}.$$

Ist $\varrho = 1$, so rückt C ins Unendliche und ist $\varrho > 1$, so existiert C überhaupt nicht.

7. Sei nun n eine beliebige Zahl, wir betrachten die Reihe $\sum_0^\infty n_k z^k$, sie ist die Grenze der Reihen:

(I) $$1,\ 1 + n_1 z;\quad 1 + n_1 z + n_2 z^2;\ \cdots$$

$$a_{p+k} - a_p = z^p n_p \left\{ 1 + \frac{n-p}{p+1} z + \cdots + \frac{(n-p)(n-(p+1))\cdots(n-(p+k-1))z^{k-1}}{(p+1)} \right\}$$

$$= z^p n_p \sigma;\ |\sigma| < 1 + \frac{|n|+p+1}{p+1}|z| \cdots \frac{(|n|+p+1)(|n|+p+2)}{(p+1)(p+2)}|z|^2 \cdots.$$

Da n eine bestimmte, also endliche Zahl und p ohne Grenze, so kann $\left|\frac{n}{p}\right| < \varepsilon$ gemacht werden, also:

$$|\sigma| < 1 + (1+\varepsilon)|z| + \cdots + (1+\varepsilon)^{k-1}|z|^{k-1}$$

und wird $(1+\varepsilon)z < 1$, also $|z|$ selbst merklich kleiner als 1, so ist

$$|\sigma| < \frac{1 - |(1+\varepsilon)z|^k}{1 - |(1+\varepsilon)z|},$$

also:

$$|\sigma| < \frac{1}{1-\varrho}, \quad \text{wo } \varrho = |(1+\varepsilon)z| < 1$$

und:

$$a_{p+k} - a_p < \frac{|z^p n_p|}{1-\varrho},$$

welche Zahl, da $|z| < 1$, so klein gemacht werden kann als man will für hinlänglich großes p und beliebiges k.

Also definiert (I) eine Zahl g. Daß nun $g = (1+z)^n$, ist bewiesen, sobald gezeigt wird, daß für g, welches bei festem z und $|z| < 1$ eine Funktion von n ist, die Fundamentalgleichung der Potenzen gilt $f(r)f(s) = f(r+s)$. Nach Definition des Produktes zweier Reihenzahlen ist:

$$f(r)\cdot f(s) = 1 + z\left|\begin{matrix} r_1 \\ +s_1 \end{matrix}\right| + z^2\left|\begin{matrix} r_2 \\ +r_1 s_1 \\ +s_2 \end{matrix}\right| + z^3\left|\begin{matrix} r_3 \\ +r_2 s_1 \\ +r_1 s_2 \\ +s_3 \end{matrix}\right| \cdots z^k\left|\begin{matrix} r_k \\ +r_{k-1} s_1 \\ +\cdots \\ r_0 s_k \end{matrix}\right| + \cdots$$

also nach Formel (3) auf S. 71, deren Allgemeingültigkeit bewiesen ist:

$$f(r)f(s) = f(r+s),$$

und da $f(1) = 1 + z$, so ist $f(n) = (1+z)^n$.

8. Hiermit ist der Binom für $|z| < 1$ und alle den Rechnungsregeln unterworfenen Zahlen n bewiesen. Die Ausdehnung des Binoms auf negative und gebrochene, kurz auf beliebige Exponenten bildet die Wasserscheide zwischen der Arithmetik und Analysis. Mit Recht hat Newton, der Urheber dieser Ausdehnung, auf sein Grab in Westminster diesen Satz als seine größte Leistung unter so vielen großen schreiben lassen. Mittels des allgemeinen Binoms kann nun die Radizierung direkt gegeben werden, z. B. $\sqrt[3]{1001}$:

$$1001 = 10^3(1 + 10^{-3}) = 10^3(1+z),$$

$$1001^{1/3} = 10(1+z)^{1/3} = 10\left(1 + \frac{1}{3}z - \frac{1}{9}z^2 + R\right),$$

wo:

$$R < \left(\frac{1}{3}\right)^3 \frac{z^3}{1-z} < \frac{10^{-9}}{26}.$$

$$\sqrt[6]{65} = 2\left(1 + \frac{1}{64}\right)^{1/6} = 2\left(1 + \frac{1}{6}z - \frac{5}{72}\cdot z^2 + R\right),$$

wo:

$$R < \frac{55}{1296}\cdot\frac{1}{64^3} < \frac{1}{5000000}.$$

XVI. Abschnitt.

Kubische Gleichung.

1. Sei $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ eine Form dritten Grades, oder eine ganze rationale Funktion dritten Grades von x. Wir versuchen, sie in eine rein kubische Form umzuwandeln und schaffen zunächst das Glied x^2 weg durch die Substitution $x=\xi+\lambda$, wir erhalten:

$$f(x)=f(\xi+\lambda)=\xi^3+\xi^2(3\lambda+\alpha)+\xi(3\lambda^2+2\alpha\lambda+\beta)+f(\lambda),$$

letzteres folgt sofort daraus, daß für $\xi=0$ links $f(\lambda)$ und rechts auch übrig bleiben muß, also durch die Substitution $x=\xi-\frac{a}{3}$ geht $f(x)$ über in $\xi^3-\xi\left(\frac{\alpha^2}{3}-\beta\right)+f\left(-\frac{\alpha}{3}\right)$, dies ist eine rein kubische Form, wenn $\alpha^2=3\beta$ ist. Wir nennen die Form $x^3-3ax-2b$ und führen für x ein $u+v$ und bilden $(u+v)^3$, welches gleich

$$u^3+v^3+3uv+3uv^2=u^3+v^3+3(u+v)uv$$

ist. Wir entnehmen daraus, daß, wenn wir v so bestimmen wollten, daß u herausfällt, u^2 darin bleibt, aber auch, daß:

$$(u+v)^3-3(u+v)uv-(u^3+v^3)$$

identisch verschwindet für jeden Wert des u und des v; können wir also zwei Zahlen u und v so bestimmen, daß:

$$uv=\frac{\alpha^3}{3}-\beta=a \quad \text{und} \quad u^3+v^3=2b,$$

so verschwindet $f(x)$ für $x_1=u+v$ und $x_1=u+v$ ist eine Wurzel von $f(x)=0$.

Zwei solche Zahlen lassen sich aber leicht bestimmen, es ist:

$$u^3v^3=a^3, \quad u^3=b\pm\sqrt{b^2-a^3}, \quad v^3=b\mp\sqrt{b^2-a^3}, \quad u=\sqrt[3]{b\pm\sqrt{D}},$$

$$v=\sqrt[3]{b\mp\sqrt{D}}, \quad x_1=u+v=\sqrt[3]{b\pm\sqrt{D}}+\sqrt[3]{b\mp\sqrt{D}},$$

und da $u+v$ sich durch Vertauschung von u und v nicht ändert:

$$x_1=\sqrt[3]{b+\sqrt{b^2-a^3}}+\sqrt[3]{b-\sqrt{b^2-a^3}},$$

das ist die so hoch berühmte Cardanische Formel.

Ist $b^2>a^3$, so ist die Wurzel x, wenn wir unter der dritten (Kubik-) Wurzel aus einer reellen Zahl die eine reelle Zahl XII, 8 verstehen, eine reelle Zahl. Ist aber $b^2<a^3$, also a größer als die positive Wurzel aus b, so erscheint x unter der Form der Kubikwurzel aus zwei konjugiert komplexen Zahlen $\lambda+i\mu$ und $\lambda-i\mu$.

2. Einige Worte zur Geschichte: Bei der Lösung der Gleichungen haben sich die Hellenen trotz der geometrischen Einkleidung von

algebraischen Gesichtspunkten leiten lassen. Die Gleichungen ersten Grades lösten sie konstruktiv mittels der Proportionenlehre oder der Ähnlichkeitssätze. Die Lösung der Gleichungen zweiten Grades gelang ihnen konstruktiv mittels der Satzgruppe des Pythagoras. Dann gingen sie konsequenterweise an die Gleichungen dritten Grades, und daß der eigentliche Leitstern die Algebra war, geht schlagend aus den beiden Problemen hervor, in die sie die Lösung kleideten, die Verdoppelung des Würfels und die Trisektion des Winkels, die beiden sogenannten Delischen Probleme. Auf konstruktivem Wege gelang ihnen diese Lösung teils mit Hilfe der Kegelschnitte, teils mittels Kurven dritten Grades oder auch mittels mechanischer Kurven; reicht doch, wenn man die Tangente von $\frac{\varphi}{3}$ als Unbekannte einführt, schon die Trisektion allein aus. Aber die rein algebraische Lösung versuchten die Griechen nicht und sie gelang den Arabern nur in vereinzelten Fällen, in denen sie die Lösung im voraus kannten, sie verzweifelten an einer algebraischen Lösung. Die Lösung der Gleichung $x^3 + ax = b$ gelang etwa um 1500 dem Scipione del Ferro (Ferreus), der von 1496—1526 Professor zu Bologna war, von dem wir sonst wenig wissen; seine Methode stimmte mit der vorgetragenen, der Methode von Hudde, vermutlich überein, denn die Entwicklung ist äußerst wahrscheinlich der Bemerkung über $(u + v)^3$ zu verdanken.

Ferro teilte seine Formel ohne die Ableitung verschiedenen Leuten mit, u. a. Fiori (Floridus), der im Jahre 1535 den Tartaglia, einen bekannten Mathematiker, Professor zu Brescia, zu einem öffentlichen Wettkampf herausforderte, indem er ihm 30 Aufgaben vorlegte, die alle auf die Lösung von $x^3 + ax = b$ hinauskamen. Tartaglia erzählt in seinem *general trattato* von 1546, daß es ihm gelungen sei, acht Tage vor dem Termin, am 12. Februar 1535, die Lösung zu finden. Es gilt heute als sehr wahrscheinlich, daß Tartaglia von der Lösung Ferros Kenntnis bekommen hat. Tartaglia hielt seine Lösung und deren Ableitung anfangs sehr geheim, teilte sie aber dann Cardanus gegen das schriftlich wiederholte eidliche Versprechen der Verschwiegenheit mit; Cardanus aber veröffentlichte die nach ihm genannte Formel in ein wenig anderer Fassung in seiner *Ars magna de rebus algebraicis*, einem gewaltigen Werke, 1545 zu Nürnberg gedruckt bei Petrejus. Cardanus fand die Ableitung selbständig, er reduzierte durch die Tschirnhausen-Substitution $x = y - \frac{a}{3}$ die allgemeine kubische Gleichung auf die spezielle Ferrische Form, er erkannte die Dreiheit der Wurzel, erkannte die Schwierigkeit, die der *Casus irreducibilis* bietet, rechnete als der Erste mit komplexen Zahlen, wußte, daß die Summe der Wurzel gleich dem Koeffizienten

des zweiten Gliedes, usw. Tartaglia beschuldigte entrüstet in verschiedenen Schmähschriften den Cardanus des Eidbruches. Cardanus schwieg, aber sein Schüler Ludovico Ferrari, der mit 23 Jahren die Auflösung der Gleichungen vierten Grades fand, dem Cardanus leidenschaftlich ergeben und ihm kongenial an Begabung und zügelloser Lebensweise, verteidigte ihn. Er führte aus, daß, als Cardanus die Formel publizierte, sie gar kein Geheimnis mehr war, da z. B. er selbst und Cardanus den Nachlaß Ferros 1542 bei dem Schwiegersohn Ferros, dem Professor Della Nave in Bologna, genau kennen gelernt hätten. Ferrari ließ sehr deutlich durchblicken, daß Tartaglia die Formel derselben Quelle verdanke.

3. Wenden wir uns nun zu der Lehre von der kubischen Gleichung zurück. Hat $f(x) = x^3 - 3ax - 2b$ die Wurzel (den Nullwert) x_1, so ist nach XIII, 5:

$$f(x) = (x - x_1)\,Q(x, x_1),$$

wo Q mit x^2 beginnt und gleich $(x - x_2)(x - x_3)$ ist; also haben wir:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0; \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -3a; \quad x_1 x_2 x_3 = 2b;$$

wiederum sind die Koeffizienten die einfachsten symmetrischen Verbindungen der Wurzeln.

4. Vermehren wir x um h, so ist der Faktor von h^1 gleich $3(x^2 - a)$; diesen Faktor nennt man die Ableitung der Funktion $f(x)$; wenn h hinlänglich klein, so ist $3h(x^2 - a)$ die wesentliche Zunahme, die Funktion ist also stetig und da sie für $x = -a$ negativ und für $x = +\infty$ positiv, so hat sie mindestens eine reelle Wurzel. Ist eine Wurzel von der Form $\lambda + i\mu$, so ist:

$$f(x) = \varphi(\lambda, \mu) + i\psi(\lambda, \mu) = 0$$

und also:

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0 \text{ und } \psi(\lambda, \mu) = 0,$$

d. h. aber $f(x)$ verschwindet auch für $\lambda - i\mu$. Die Gleichung dritten Grades hat also entweder eine reelle Wurzel und zwei konjugierte komplexe oder drei reelle Wurzeln.

5. Wenn $b^2 > a^3$, so waren u_1 und v_1 reell, und die sicher vorhandene eine reelle Wurzel x_1 kann gleich $u_1 + v_1$ gesetzt werden. Es ist dann:

$$Q(x, x_1) = x^2 + x x_1 + x_1^2 - 3a$$

und die Bedingung der Reellität von x_2 und x_3 ist:

$$x_1^2 \geqq 4(x_1^2 - 3a) \quad \text{oder} \quad 4a \geqq x_1^2.$$

d. h. $(u - v)^2 < 0$, weil $4a = 4uv$ war, d. h. aber u und v sind keine reellen Zahlen, d. h. $b^2 < a^3$. Also: Wenn alle drei Wurzeln reell sein sollen, so muß $b^2 < a^3$ sein und die eine der reellen Zahlen unter der Form:

$$\sqrt[3]{\alpha + i\beta} + \sqrt[3]{\alpha - i\beta} \quad \text{erscheinen.}$$

6. Als Beispiel nehmen wir die Aufgabe, von einer Kugel $^1/_3$ durch eine Ebene abzuschneiden. Daß eine reelle Lösung existiert, ist von vornherein klar. Wir haben:

$$\frac{4}{9} r^3\pi = h^2\pi\left(r - \frac{h}{3}\right),$$

und setzen wir $\frac{r}{h} = x$, so ist:

$$\frac{4}{9} x^3 = x - {}^1/_3; \quad x^3 - {}^9/_4 x + {}^3/_4 = 0.$$

Es ist hier $a = {}^3/_4$, $b = -{}^3/_8$; also:

$$a^3 > b^2 \quad \text{und} \quad D = -{}^{18}/_{64};$$

$$u^3 = {}^3/_8(-1 + i\sqrt{2}) \quad \text{und} \quad v^3 = {}^3/_8(-1 - i\sqrt{2}),$$

und die Cardanische Formel versagt.

Durch den „*casus irreducibilis*“ der Gleichung dritten Grades sind wir also gezwungen, die Rechnung mit komplexen Zahlen aufzunehmen.

7. Es muß bemerkt werden, daß es Vieta, dem größten Mathematiker Frankreichs nach Fermat, 1591 gelang, den *casus irreducibilis* zu erledigen. Er brachte $x^3 - 3ax - 2b$ in die Form:

$$\frac{x^3}{a^{3/2}} - \frac{3x}{a^{1/2}} = \frac{2b}{a^{3/2}},$$

und setzte $\frac{b}{a^{3/2}}$, welches ja kleiner als 1 ist, gleich $\cos\varphi$ und identifizierte die Gleichung dann mit:

$$\left(2\cos\frac{\varphi}{3}\right)^3 - 3\left(2\cos\frac{\varphi}{3}\right) = 2\cos\varphi,$$

d. h. er fand in $x = 2a^{1/2}\cos\frac{\varphi}{3}$ die Lösung. (Gedruckt in der Vieta-Ausgabe von van Schooten, 1615.)

XVII. Abschnitt.

Die komplexen Zahlen.

1. Die Notwendigkeit, mit Symbolen von der Form $a + ib$ zu rechnen, ist nachgewiesen; i bedeutet darin einen Begriff, dessen Quadrat gleich -1 ist. Das Zeichen i ist von Gauß in den *disquisitiones arithmeticae „brevitatis causa“*, d. h. als Abkürzung eingeführt, aber schon 1777 von Euler benutzt. Der Name imaginäre Zahlen für Zahlen von der Form ai rührt von Descartes her, *la géometrie* 1637; ihre Anerkennung als Zahlen, d. h. der Nachweis, daß

Zählbares unter sie fällt, rührt im wesentlichen von Gauß her, der in der Anzeige zur *Theoria residuorum biquadraticorum* der *Theoria* der quadratischen Reste (Komplex) auf das schärfste hervorhebt, daß, wenn es sich um Abzählung von Reihen (z. B. um die Punkte einer Ebene), d. h. also um Mannigfaltigkeiten zweier Dimensionen handelt, auch Zahlen zweier wesentlich verschiedenen Einheiten, um es kurz zu sagen, zweifach benannte Zahlen nötig sind. G. Cantor hat mit Benutzung des Satzes, daß jede Reihenzahl zwischen 0 und 1 sich in einen Kettenbruch von der Form $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots)$, wo dann α ganze positive Zahlen sind, entwickeln läßt, nachgewiesen, daß die Mächtigkeit der Zahlen durch Einführung der Zahlen $a + ib$ nicht geändert wird, ja nicht einmal durch Einführung von n verschiedenen Grundeinheiten, Crelle, Band 84. Übrigens sah noch Cauchy in der komplexen Zahl nichts als ein Mittel, zwei Gleichungen in eine zusammenzuziehen oder eine in zwei zu spalten, da irgend zwei doppelt benannte Zahlen $a + ib$ und $\alpha + i\beta$ nur gleich sind, wenn $a = \alpha$ und $b = \beta$.

2. Die Addition und Subtraktion wird wie die zweifach benannter Zahlen definiert, also:

$$(a + ib) \pm (a' + ib') = (a \pm a') + i(b \pm b').$$

Da wir zur vollständigen Durchführung der Subtraktion i', d. i. $-i$ einführen müssen, so wird die Subtraktion auf die Addition der entgegengesetzten Zahlen zurückgeführt. Die Multiplikation und die Division macht Schwierigkeiten. Um sie zu überwinden, brauchen wir den Grundsatz, daß sich mit i rechnen lasse wie mit jedem anderen Zahlzeichen, wobei dann immer i^2 durch -1 ersetzt werden kann. So gelangen wir zu folgenden Festsetzungen:

Wenn $e = 1$, $e' = 1'$, $i^2 = -1$ und wir $-i$ mit i' bezeichnen, so ist:

$$ii = -1; \quad i'i' = -1; \quad ei = ie = i; \quad ei' = i'e = i';$$
$$e'i = ie' = i'; \quad e'i = i'e' = i; \quad i'i = ii' = +1.$$

Ferner definieren wir:

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Man sieht sofort, daß die Gesetze der Addition, Subtraktion und Multiplikation erhalten bleiben. Gauß ordnet die vier Einheiten, die Wurzeln der Gleichung $x^4 - 1 = 0$ in der Reihenfolge $+1$, i; -1; i'; $+1$ und nennt jede die erste adjungierte der unmittelbar vorangehenden; dann gehören zu jeder komplexen Zahl $a + ib$ drei adjungierte:

$$ai - b; \quad -a - bi; \quad b - ai$$

(Fig. 4), und es läßt sich für die Multiplikation eine Definition geben, welche alle Fälle umfaßt.

Das Produkt zweier komplexer Zahlen c und d ist diejenige Zahl cd, welche so aus c und seinen drei adjungierten gebildet ist wie d aus 1 und ihren drei adjungierten. Beispiele:

$$(8 + 3i)2; \quad (5 + 2i)(4 + 5i).$$

3. Der Quotient $c : d$ ist diejenige Zahl, welche mit dem Divisor d multipliziert den Dividend c gibt. Wir beweisen die Existenz des Quotienten durch den Satz: Zu jeder komplexen Zahl c, ausgenommen 0, gibt es eine reziproke $\gamma = \frac{1}{c}$.

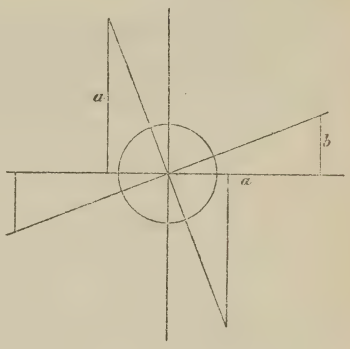

Fig. 4.

Beweis: Sei $c = a + ib$, und $\gamma = u + iv$, so erhalten wir aus $c\gamma = 1$

$$au - bv = 1$$

und: $$av + bu = 0,$$

also: $u = \frac{a}{a^2 + b^2}$; $v = \frac{-b}{a^2 + b^2}$,

zwei ganz bestimmte Zahlen, außer wenn:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \text{d. h.} \quad c = 0,$$

und wenn: $c = a + ib$ und $d = f + ig$ ist:

$$c : d = (a + ib)\left(\frac{f}{f^2 + g^2} - \frac{ig}{f^2 + g^2}\right),$$

und wenn $f^2 + g^2 = 1$, so ist:

$$\frac{1}{d} = f - gi.$$

4. Die Zahlen a und b heißen die Koordinaten der komplexen Zahl, a die reelle, b die imaginäre oder laterale, die positiv genommene $\sqrt{a^2 + b^2}$ heißt der absolute Betrag, und wird dadurch bezeichnet, daß man die komplexe Zahl c in zwei Striche einschließt, auch mit den Buchstaben r, ϱ usw., also $\sqrt{a^2 + b^2} = |c| = r$. Jede komplexe Zahl c läßt sich auf die Form bringen: $r\left(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right)$; bezeichnet man $\frac{a}{r}$ mit α, $\frac{b}{r}$ mit β, so ist $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ und $a + ib = r(\alpha + i\beta)$, diese Form nennt man die Normalform der komplexen Zahl.

Ist $c_1 = r_1(\alpha_1 + i\beta_1)$ und $c_2 = r_2(\alpha_2 + i\beta_2)$, so ist:

$$c_1 c_2 = r_1 r_2(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)),$$

da:

$$(\alpha_1\alpha_2 \mp \beta_1\beta_2)^2 + (\alpha_1\beta_2 \pm \alpha_2\beta_1)^2 = (\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2),$$

so ist:

$$c_1 c_2 = r_1 r_2(\gamma + \delta i),$$

wo $\gamma^2 + \delta^2$ wieder $= 1$ ist.

Komplexe Zahlen wie: $\alpha + i\beta$, deren absoluter Betrag $= 1$ ist, heißen komplexe Einheiten. Wir haben die Sätze:

Der absolute Betrag eines Produkts ist gleich dem Produkt der absoluten Beträge ihrer Faktoren.

Das Produkt zweier komplexer Einheiten ist eine komplexe Einheit.

Der Quotient zweier komplexer Einheiten ist wieder eine komplexe Einheit.

5. Über die Summen bzw. die Differenzen gilt der wichtige Satz:

Der absolute Betrag der Summe zweier komplexer Zahlen ist nie größer als die Summe der absoluten Beträge der Summanden.

Es ist:

$$(aa' + bb')^2 \leqq (aa' + bb')^2 + (ab' - a'b)^2,$$

$$2(aa' + bb') \leqq 2\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)},$$

$$a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + 2 \cdots \leqq a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 + 2\sqrt{\ },$$

$$(a + a')^2 + (b + b')^2 \leqq \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2}\right)^2,$$

$$\sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2} \leqq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2} \quad \text{q. e. d.}$$

Die Gleichheit tritt nur ein, wenn $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, d. h. also wenn die Zahlen zur selben komplexen Einheit gehören.

6. Da jede komplexe Zahl das Produkt einer positiven reellen Zahl r, einer Maßzahl, mit einer komplexen Einheit ist, so hat nur die Rechnung mit dieser Interesse. Wir sehen, daß zu jeder komplexen Einheit eine vollständige Zahlenreihe gehört von der Mächtigkeit des Linearkontinuums. Jede dieser Zahlenreihe kann durch einen Strahl abgebildet werden, alle zusammen durch ein die Ebene erfüllendes Strahlenbündel. Die Einheiten selbst sind nicht unabhängig voneinander, aus je zweien von ihnen läßt sich jede dritte durch die vier Spezies mit reellen Zahlen ableiten. Wollte man Zahlen von mehr als zwei fundamental verschiedenen Einheiten einführen, so ließe sich, wie Weierstraß gezeigt hat, keine Festsetzung so treffen, daß die Rechenregeln bestehen bleiben; ein Produkt kann 0 werden, ohne daß einer der Faktoren 0 wird, und die Division wäre in unzählig vielen Fällen unmöglich.

7. Sei $\alpha + i\beta$ eine komplexe Einheit, also $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, d. h. von den beiden Größen α und β ist die eine, abgesehen vom Zeichen, durch die andere bestimmt, dann können wir beide als Funktion einer dritten Größe φ ansehen und über diese Funktion zweckmäßige Bestimmung treffen.

Sei: $\alpha = c_\varphi$ und $\beta = s_\varphi$ und $\alpha + i\beta = e_\varphi$. Es muß dann zu jedem Wert des φ ein ganz bestimmtes Wertsystem α und β gehören, also

c_φ und s_φ müssen den Charakter eindeutiger Funktion haben und e_φ desgleichen.

Da $e_\varphi e_\psi = e_\vartheta$ ist, so muß:

$$c_\varphi s_\psi - s_\varphi c_\psi = c_\vartheta \quad \text{und} \quad c_\varphi s_\psi + s_\varphi v_\psi = s_\vartheta$$

sein.

Werden die Faktoren gleich, so erhält man:

$$(\alpha + i\beta)^n = (e_\varphi)^n = e_{\vartheta}.$$

Die Gleichungen zeigen, daß wir $c_\varphi = \cos\varphi$ und $e_\varphi = \sin\varphi$ setzen können. Zu der gleichen Festsetzung kommen wir, wenn wir a als Abszisse und b als Ordinate im Sinne der analytischen Geometrie ansehen. Wir haben dann:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$$

und:

$$a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

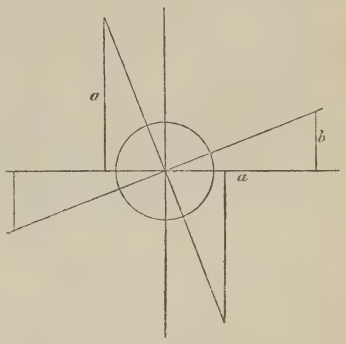

Fig. 4.

wo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, φ der Richtungsbogen im Einheitskreis, genauer dessen Maßzahl und φ bestimmt wird durch $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ und das Zeichen von cos oder sin φ, d. h. von a oder b. Während r bestimmt ist, ist φ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt. r und φ sind Polarkoordinaten (Fig. 4).

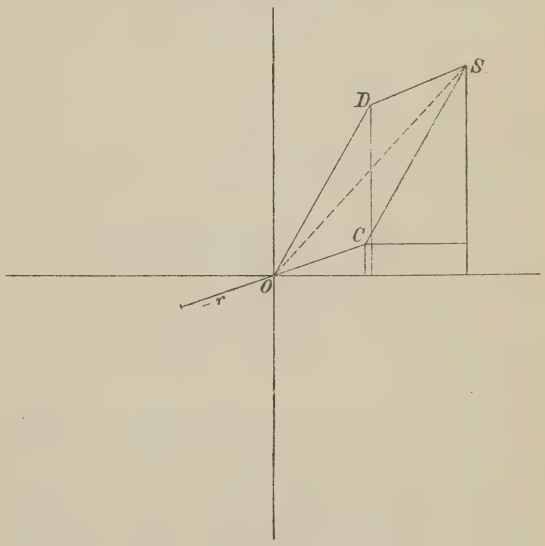

Fig. 5.

8. Die geometrische Repräsentation rührt nicht von Gauß her, obwohl seine *Theoria residuorum biquadraticorum* sie in die Funktionentheorie eingeführt hat und Gauß schon in seiner Dissertation von 1799 die Kenntnis andeutet, auch nicht von Argand oder François 1806, sondern der nachgewiesene erste ist der dänische Feldmesser Caspar Wessel, der am 10. Mai 1797 der dänischen Akademie eine Abhandlung über die Darstellung der Richtungen überreichte.

Die Summe zweier komplexen Größen, d. h. der Punkt der Gaußschen Zahlenebene, der ihr entspricht, wird dann gefunden durch die Diagonale des aus den Summanden vervollständigten Parallelogramms. Die geometrische Addition, die zugleich die der Kräfte ist (Vektoren im Sinne der Hamiltonschen Quaternionentheorie), ist also nichts als eine komplexe Addition. Die Differenz D von S und C wird durch geometrische Addition der entgegengesetzten Größe gefunden (Fig. 5 auf S. 83).

Das Produkt uv entsteht so aus u, wie v aus der Einheit; um es zu konstruieren, nimmt man u als Einheit und konstruiert daraus die Koordinaten von v, und erhält so ein Produkt, das nach Größe und Richtung uv darstellt (Fig. 6).

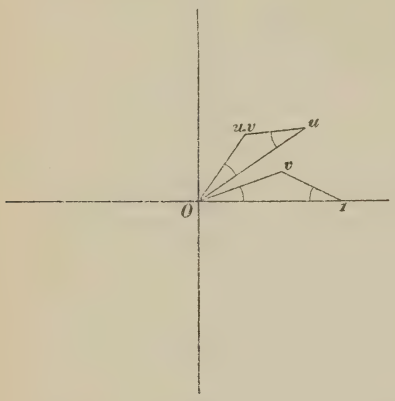

Fig. 6.

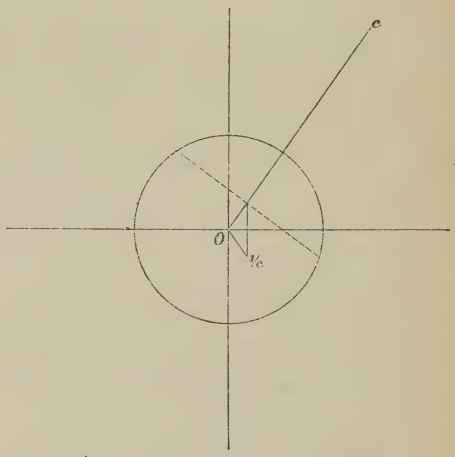

Fig. 7.

Sie sehen, daß, wenn $a_1 + b_1 i \{(r_1 \varphi_1)$ und $a_2 + i b_2 \{(r_2 \varphi_2)$, dann $uv \{(r_1 r_2;\ \varphi_1 + \varphi_2)$ ist.

Gleichzeitig folgt die geometrische Division:

$$uv : u = v; \quad \text{ist } uv \{(\varrho, \vartheta), \quad \text{und } u \{(r, \varphi),$$

so ist:

$$\frac{uv}{u} \left\{ \left(\frac{\varrho}{r},\ \vartheta - \varphi \right) \right.$$

Insbesondere ist $\frac{1}{c} \left\{ \left(\frac{1}{r},\ -\varphi \right) \right.$, d. h. man konstruiert die Polare zu c, bzw. transformiert c durch reziproke Radien und nimmt das Spiegelbild, dann ist:

$$\frac{1}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{ib}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{(Fig. 7).}$$

Nach unserer Festsetzung ist $e_\varphi e_\psi = e_{\varphi + \psi}$ und $(e_\varphi)^n = e_{n\varphi}$.

Dies ist der sogenannte Satz des Moivre:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Man kann die Theorie der komplexen Zahlen und diese Auflösung auch rein algebraisch durchführen, muß dann aber den Binom erst noch weiter durcharbeiten.

XVIII. Abschnitt.

Fortsetzung der Gleichung dritten Grades.

1. Die Gleichung $x^3 - 1 = 0$ hat die Wurzeln:

$$x = 1, \quad x = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

d. h.:

$$x_1 = \cos\frac{02\pi}{3} + i\sin\frac{02\pi}{3}; \quad x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \varepsilon;$$

und:

$$x_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \eta,$$

daß ε^3 und $\eta^3 = 1$ ergibt der Moivre ohne weiteres; man sieht auch sofort, daß die $\sqrt[n]{\ }$ aus 1 enthalten sind in der Form:

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

wenn k von 0 bis $n-1$ läuft. Es ist, da $1 \cdot \varepsilon \cdot \eta = 1 = \varepsilon^3 = \eta^3$ ist, $\eta = \varepsilon^2$ und $\varepsilon = \eta^2$, also die drei dritten Wurzeln aus 1 sind die Potenzen einer der beiden „primitiven“ Wurzeln ε^0, ε^1, ε^2 oder η^0, η^1, η^2. Dieser Satz läßt sich leicht verallgemeinern, was ich Ihnen überlasse.

2. Da u und v aus:

$$x^3 - 3ax - 2b = 0,$$

$x = u + v$ durch:

$$u^3 = b + \sqrt{b^2 - a^3} \quad v^3 = b - \sqrt{b^2 - a^3}$$

bestimmt waren, so sind, im Falle $D = b^2 - a^3 > 0$ ist, $u^3 = N$, $v^3 = M$ reelle Zahlen, und wenn wir dann die eine reelle Wurzel u_0 bzw. v_0 nennen, so erhalten wir als Lösungen für u und v je drei Werte, also im ganzen neun Lösungen x. Aber das System war künstlich erhöht, es mußte $uv = a$ sein, d. h. reell, und somit bleiben nur die Lösungen $x_1 = u_0 + v_0$, $x_2 = u\varepsilon + v\eta$ und $x_3 = u\eta + v\varepsilon$ übrig.

3. Ist $a^3 < b^2$, so ist:

$$\left\{\begin{matrix} u^3 \\ v^3 \end{matrix}\right. = a^{3/2}\left(\frac{b}{a^{3/2}} \pm i\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^{3/2}}}\right);$$

setzt man $\frac{b}{a^{3}/_{2}}$, wo unter $a^{3}/_{2}$ die $+\sqrt{a^3}$ verstanden wird, gleich $\cos\varphi$, was erlaubt, da $|a^{3}/_{2}| > |b|$ und $\sin\varphi = +\sqrt{1-\cos^2}$, so ist:

$$u^3 \text{ bzw. } v^3 = a^{3}/_{2}(\cos\varphi \pm i\sin\varphi),$$

also:

$$u_0 = a^{1}/_{2}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right), \quad v_0 = a^{1}/_{2}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

wodurch $u_0 v_0 = a$, und da:

$$\eta = \frac{1}{\varepsilon} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}$$

und:

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta} = \cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3},$$

so sind $u_0\varepsilon$ und $v_0\eta$ und $u_0\eta$ und $v_0\varepsilon$ konjungiert komplexe Zahlen, und wir haben die drei Lösungen, die alle drei reell sind:

$$x_1 = 2a^{1}/_{2}\cos\frac{\varphi}{3}; \quad x_2 = -2a^{1}/_{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3}\right)$$

und:

$$x_3 = 2a^{1}/_{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right).$$

Da $\frac{\varphi}{3}$ nie $> \frac{\pi}{3}$, so ist die zweite Wurzel unter allen Umständen negativ, die erste positiv, die dritte ist positiv, sobald $\varphi > 90^0$, d. h. b negativ, ist. In dem von uns angeführten Beispiel der Kugelteilung wird die zweite Wurzel beseitigt durch die Negativität und die dritte dadurch, daß sie für $\frac{r}{h}$ einen Wert $< \frac{1}{2}$, d. h. $h > 2r$ gibt. Die Gleichung ist eben allgemeiner als das Problem.

Gleichungen vierten und fünften Grades.

4. Das Pensum gestattet nur wenig Zeit auf die Gleichungen höheren Grades zu verwenden, um so weniger, als ein Aufgabenkreis nicht in Betracht kommt; man begnüge sich daher mit dem Nachweis der Auflösbarkeit der Gleichungen des vierten und der Unauflösbarkeit der Gleichungen fünften Grades. Für Oberrealschulen kann man etwas ausführlicher auf die Gleichung vierten Grades eingehen. Sie finden Beispiele in: Emil Lampe, geometrische Aufgaben zu den kubischen Gleichungen; Berlin 1877, und in seinem Programm von der Louisenstädtischen Oberrealschule von 1885.

Durch die Tschirnhausensche Substitution $\xi = x - \frac{a}{4}$ beseitigt man das Glied mit x^3 und kann also voraussetzen:

$$x^4 - 4ax^2 - 8bx + 4c = 0.$$

Man setzt $x = \sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v}$ und:

$$\alpha = t + u + v, \quad \beta = uv + vt + tu, \quad \gamma = tuv,$$

so folgt:

$$x^2 = \alpha + 2\left(\sqrt{uv} + \sqrt{vt} + \sqrt{tu}\right),$$

$$(x^2 - \alpha)^2 = 4\left(\beta + 2x\sqrt{\gamma}\right),$$

oder:

$$x^4 - 2x^2\alpha - 8x\sqrt{\gamma} + \alpha^2 - 4\beta = 0.$$

Der Vergleich der Koeffizienten ergibt:

$$\alpha = 2a; \quad \begin{cases} \sqrt{\gamma} = b \\ \gamma = b^2 \end{cases}; \quad \beta = a^2 - c.$$

Die kubische Gleichung, deren Wurzeln t, u, v sind, ist:

$$(z - t)(z - u)(z - v) = z^3 - 2az^2 + z(a^2 - c) - b^2 = 0.$$

Nach Auflösung dieser sogenannten Resolvente ist:

$$x = \pm\sqrt{t} \pm \sqrt{u} \pm \sqrt{v},$$

mit der Bedingung, daß:

$$\pm\sqrt{t}\,(\pm\sqrt{u})\,(\pm\sqrt{v}) = +b$$

ist, wonach übrig bleiben:

$$x_1 = +\sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v}; \quad x_2 = -\sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v};$$

$$x_3 = -\sqrt{t} + \sqrt{u} - \sqrt{v}$$

und:

$$x_4 = \sqrt{t} - \sqrt{u} - \sqrt{v}.$$

5. In mancher Hinsicht, d. h. für numerische Rechnung bequemer, ist die folgende Methode:

Die Gleichung sei:

$$x^4 + 2ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

oder:

$$(x^2 + ax)^2 = x^2(a^2 - b) - cx - d.$$

Um auch die rechte Seite zu einem Quadrat zu machen, fügt man links den Parameter y hinzu, also:

$$(x^2 + ax + y)^2 = x^2(a^2 - b + 2 \cdot y) + x(2ay - c) + y^2 - d.$$

Damit die rechte Seite ein Quadrat sei, ist nötig und hinreichend, daß:

$$(2ay - c)^2 = 4(a^2 - b + 2y)(y^2 - d),$$

und dies ist die kubische Resolvente der biquadratischen Gleichung. Sie hat immer eine reelle Wurzel y, setzt man diese in die Gleichung ein, so ist:

$$x^2 + ax + y = \pm (x\sqrt{a^2 - b + 2y} + \sqrt{y^2 - a});$$

eine Gleichung, die wegen des doppelten Zeichens zwei quadratische Gleichungen für x repräsentiert.

6. Die Gleichung fünften Grades: Der Beweis, daß die Gleichung fünften Grades generaliter nicht algebraisch auflösbar ist, d. h. sich nicht mit Zuhilfenahme von Wurzelirrationalitäten oder Radikalen in Faktoren zerspalten oder reduzieren läßt, beruht auf dem Kroneckerschen Satz: Eine Gleichung fünften Grades, die irreduzibel und algebraisch lösbar ist, hat entweder fünf reelle Wurzeln oder eine reelle Wurzel, niemals drei reelle (und zwei imaginäre), für dessen Beweis ich auf H. Webers Enzyklopädie der elementaren Mathematik verweise.

Irreduzibel heißt eine Gleichung, wenn sie sich nicht in das Produkt zweier ganzer rationaler Faktoren mit rationalen Koeffizienten spalten läßt. Ist in $\sum a_k x^{n-k}$ die Zahl $a_0 = 1$ und die a ganze Zahlen, so haben wir schon am Beispiel der quadratischen Formen bewiesen, daß die Wurzel kein Bruch sein kann, und zeigen ebenso, daß, wenn die Form reduzibel ist, die Faktoren wieder von derselben Art sein müssen. Der Nachweis der Irreduzibilität gehört zu den schwierigsten Problemen der Algebra, allgemeine Kriterien gibt es nicht. Für den hier vorliegenden Zweck genügt aber der Eisensteinsche Satz: Eine ganze rationale Form mit ganzen Koeffizienten, deren sämtliche Koeffizienten von a_1 bis a_n durch eine Primzahl p teilbar sind, ist irreduzibel, wenn a_n nicht auch durch p^2 teilbar ist.

Beweis: Es sei:

$$\sum a_k x^{n-k} = \sum b_i x^{\mu - i} \times \sum c_h x^{\nu - h},$$

wo $\mu + \nu = n$ und b_0 und c_0 gleich 1.

Der Vergleich der Koeffizienten ergibt die Formel:

$$a_k = \sum_0^k b_{k-p} c_p,$$

wo $c_p = 0$, wenn $p > \nu$, und c_{-p} auch 0 ist.

Also haben wir die Kette von Gleichungen:

$$a_n = b_\mu c_\nu; \quad a_{n-1} = b_\mu c_{\nu-1} + b_{\mu-1} c_\nu; \quad a_{n-2} = b_\mu c_{\nu-2} + b_{\mu-1} c_{\nu-1} + b_{\mu-2} c_\nu;$$
$$a_\nu = b_\mu c_{\nu-\mu} + b_{\mu-1} c_{\nu-\mu+1} \cdots b_1 c_{\nu-1} + c_\nu; \quad \cdots a_2 = b_2 + b_1 c_1 + c_2;$$
$$a_1 = b_1 + c_1.$$

Ist nun a_n durch p teilbar, aber nicht durch p^2, so kann von den beiden Faktoren nur einer, z. B. b_μ, durch p teilbar sein, dann ergibt die zweite Gleichung, daß auch $b_{\mu-1}$ durch p teilbar ist und so herab bis b_1; dann aber folgt rückwärts, daß c_1, c_2 bis c_ν durch

p teilbar sind, also a_n durch p^2 teilbar sein müßte gegen die Voraussetzung.

6. Danach lassen sich beliebig viele irreduzible Gleichungen fünften Grades mit drei reellen Wurzeln bilden, wodurch der Nachweis, daß die Gleichung fünften Grades überhaupt sich nicht algebraisch lösen läßt, geliefert ist. Man kann, wie 1786 E. J. Bring in Lund gezeigt hat, mittels Auflösung von Gleichungen von nicht höherem als viertem Grade die Gleichung fünften Grades auf die Normalform $x^5 + ax + b = 0$ bringen. Betrachten wir z. B.

$$y = x^5 - 80x - 10.$$

Die Ableitung ist $5(x^4 - 16)$, also wächst die Funktion von $x = -\infty$ bis $x = -2$, nimmt ab von -2 bis $+2$ und wächst von $+2$ bis $+\infty$.

Tabelle:

x	y	x	y
$-\infty$	$-\infty$	-2	$+118$
-4	-714	$+2$	-138
-3	-11	$+y$	$+694$

also liegt eine Wurzel zwischen -3 und -2, eine Wurzel zwischen -2 und $+2$, eine zwischen 2 und 4; andere Beispiele sind: $x^5 - 9x - 3$, wo eine Wurzel zwischen -2 und $-1{,}16$, eine zweite zwischen $-1{,}16$ und $+1{,}16$ und eine dritte zwischen $+1{,}16$ und $+2$ liegt. Eine unendliche Schar liefert $x^5 = 5p^4x - pq$, wo p Primzahl und p und q teilerfremd und $q < 4p^4$. Eine reduzible Schar gibt:

$$x^5 - 5p^4x - 4p^5.$$

XIX. Abschnitt.

Die Exponentialfunktion.

1. Der binomische Satz in der Form $(1 + z)^n = \sum n_k z^k$ ist, wenn $|z| < 1$ ist, an die einzige Bedingung gebunden, daß n endlich, $\left(\frac{n}{p}\right.$ sonst nicht $\left. < \varepsilon\right)$; man kann versuchen, diese Beschränkung abzustreifen. Die Hoffnung, daß $\sum n_k \cdot z^k$ bei über jedes Maß wachsendem n endlich bleibt, beruht darauf, daß, in dem Verhältnis wie n_k wächst, z^k abnimmt. Es ist:

$$n_k = \frac{n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n} \cdots\right) \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Wenn also z. B. $z = \frac{1}{n}$ ist, so ist:

$$n_k \cdot z^k = \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \cdots \frac{k-1}{n}\right)$$

und nähert sich mit wachsendem n mehr und mehr dem Ausdruck $\frac{1}{k!}$; ist k selbst über jedes Maß groß, so wird der Zähler von $n_k : n^k$ unendlich klein und der Nenner unendlich groß, als das Verhältnis 0.

2. Wir betrachten jetzt die Reihenzahl:

$$\text{(I)} \qquad \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \quad \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdots,$$

oder:

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}, \quad \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdots,$$

oder auch:

$$\sum_0^\infty 1_k \cdot 1^k; \quad \sum_0^\infty 2_k \left(\frac{1}{2}\right)^k; \cdots \sum_0^\infty n_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \cdots,$$

oder auch von der allgemeinen Form:

$$\sum_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!}.$$

In dieser letzten Form sehen wir am deutlichsten, daß die Reihe eine Fundamentalreihe ist, und zwar eine beständig steigende, und ferner, daß die Glieder der Reihe mit wachsendem Index n der $\sum_0^\infty \frac{1}{k!}$ so nahe kommen als man will, ohne sie je zu erreichen. Daß $\sum_0^\infty \frac{1}{k!}$ eine Zahl der Zahlenreihe ist, ist leicht zu zeigen. Wir bezeichnen sie mit e und haben somit bewiesen, daß (I) die Grenze e hat. In der Form $\frac{2}{1} \cdots$ hat die Grenze die Form 1^∞. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß, wenn man die fallende Fundamentalreihe $\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} \cdots \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ betrachtet, auch ihre Grenze als 1^∞ angesehen werden muß, und zwar nach den Sätzen über das Produkt zweier Reihenzahlen als $\frac{1}{e}$. Man sieht, daß 1^∞ unbestimmt ist, wenn man den Prozeß des Werdens nicht kennt und kann diese Gelegenheit benutzen, um die Unbestimmtheit des Zeichens ∞ hervorzuheben, welches eben nur das Unendliche im Werden bezeichnet, zum Unterschied von den Cantorschen transfiniten Zahlen, die völlig bestimmte Modi des Unendlichen bezeichnen. Das Zeichen ∞, heißt dies, gibt nur eine Art und Weise der Veränderlichkeit an, ganz analog wie

das unendlich kleine. Zugleich hat man hier ein natürliches Beispiel der Unstetigkeit einer Funktion, indem $(1+z)^z$, wenn z von $-\varepsilon$ bis $+\eta$ geht, von $\frac{1}{e}$ auf e springt.

Wir haben also das Resultat:

$$\text{(II)}\quad \operatorname*{limes}_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \operatorname*{limes}_{n=\infty}\sum_0^\infty \frac{n_k}{n^k} = \sum_0^\infty \frac{1}{k!} = e = 2{,}718\,281\,8\cdots$$

3. Wir betrachten jetzt die Reihe, deren allgemeines Glied:

$$\text{(III)}\qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}.$$

Es ist:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^x = \sum_0^\infty (nx)_k \frac{1}{n^k} = \sum_0^\infty \frac{x(x-1)\cdots\left(x-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}.$$

Wir sehen:

$$\operatorname*{limes}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!} = f(x).$$

Wir haben zunächst zu untersuchen, ob $f(x)$ eine Zahl der Zahlenreihe ist. Sei:

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}$$

und x ganz unbeschränkt nur dem absoluten Betrage nach endlich, sei $|x| = \nu$, so ist:

$$|f(x)| \leqq \sum_0^\infty \frac{\nu^k}{k!}.$$

Da ν endlich und k über jedes Maß wächst, so wird es unter den Werten von k einen Wert p geben, für welchen $\frac{\nu}{p+a}$ für jedes $a < \varepsilon$ ist.

Nun ist:

$$\sum_0^\infty \frac{\nu^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\nu^k}{k!} + \sum_{k=p}^\infty \frac{\nu^k}{k!} = s_1 + s_2;$$

$$s_2 = \frac{\nu^p}{p!}\left(1+\frac{\nu}{p+1}+\frac{\nu}{p+1}+\frac{\nu}{p+2}\cdots\right); \quad s_2 < \frac{\nu^p}{p!}\cdot\frac{1}{1-\frac{\nu}{p+1}};$$

$$|f(x)| \leqq s_1 + \frac{\nu^p}{p!}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon},$$

d. h., da p beliebig groß gewählt werden kann, $f(\nu)$ weicht von der Zahl s_1 so wenig ab, als man will. Wir haben daher bewiesen, daß $f(x)$ für jeden Wert des x, dessen absoluter Betrag endlich ist, einen

bestimmten endlichen Wert hat, oder — was dasselbe sagt — daß die unendliche Reihe $\sum \frac{x^2}{k!}$ im ganzen endlichen Bereich des x konvergiert. Es hat also die Reihe $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$ eine Grenze, und sie ist $f(x)$.

4. Obwohl nun jedes Glied der Reihe (III) die x-Potenz des entsprechenden Gliedes der Reihe (I) ist, so muß doch noch bewiesen werden, daß dieselbe Beziehung zwischen den Grenzen besteht, d. h. daß $f(x) = e^x$ ist. Wohl haben wir in Abschnitt XII nachgewiesen, daß eine endliche Folge von Elementaroperationen sich von den Gliedern auf die Grenze übertragen läßt — aber hier handelt es sich um den Satz: Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert, für unendliche hohe Exponenten der Potenz, und dafür ist der Satz nicht bewiesen. Daß Vorsicht geboten sei, sieht man aus dem Umgekehrten, indem zwischen den Grenzen zweier Reihen Beziehungen bestehen können, welche zwischen den erreichbaren Gliedern der Reihe nicht bestehen. So z. B. ist die Grenze der Reihe:

$$\text{(IV)} \qquad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_0^\infty \frac{n_k}{n^k} \cdot x^k$$

auch gleich:

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}.$$

5. Da wir vermuten, daß $f(x) = e^x$ und wissen, daß $f(1) = e$ ist, so werden wir sehen, ob für die Funktion $\sum \frac{x^k}{k!}$ das Additionstheorem der Potenzen gilt. Es ist:

$$f(x) \cdot f(y) = \sum_0^\infty \frac{x^p}{p!} \cdot \sum_0^\infty \frac{y^p}{p!} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} x^{p-\alpha} y^\alpha \cdot \frac{1}{(p-\alpha)!} \cdot \frac{1}{\alpha!}$$

$$= \sum_0^\infty \frac{1}{p!} \sum_0^p \frac{p!}{(p-\alpha)!\alpha!} x^{p-\alpha} y^\alpha = \sum_0^\infty \frac{(x+y)^p}{p!} = f(x+y).$$

Also $f(x)$ in allen bisher erklärten Fällen von e^x gleich e^x.

Da nun für $f(x)$ das Additionstheorem und somit alle Regeln der Potenzrechnung gelten, und zwar für jeden Wert des x, solange $|x|$ endlich ist, während in e^x das Argument x auf reelle Zahlen beschränkt ist, so kam Euler auf den Gedanken, an Stelle des zerrissenen und unvollständigen Potenzbegriffes die einheitliche Definition zu setzen:

$$e^x = f(x) = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!},$$

deren Übereinstimmung mit den fünf Fällen $x = 2$, 3, usw., $x = 1$, usw. nachgewiesen ist, weil für die so definierte Potenz alle Regeln der Potenzrechnung bestehen bleiben. Die Funktion $f(x) = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!} = e^x$ heißt die Exponentialfunktion.

6. Als neu kommt jetzt die Potenz mit komplexem Exponenten $a + ib$ hinzu, oder, da $e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$ ist, die Potenzen mit imaginären Exponenten $e^{\varphi i}$; es ist $e^{\varphi i}$ selbst eine komplexe Zahl, da:

$$e^{\varphi i} = \sum_0^\infty \frac{\varphi^k i^k}{k!} = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} + i \sum_0^\infty (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} = u + iv \text{ ist.}$$

Die Exponentialfunktion, heißt dies, spaltet sich in zwei Funktionen: u und v. Da $e^{-\varphi i} = u - iv$ ist, so ist $e^0 = u^2 + v^2 = 1$; u und v sind also Koordinaten einer komplexen Einheit, und es drängt sich der Gedanke auf, daß $u = \cos\varphi$ und $v = \sin\varphi$ sein könnte. Wir bezeichnen vorläufig u mit $c(\varphi)$ und v mit $s(\varphi)$.

7. Zunächst ist klar, daß u und v für jedes endliche x Reihenzahlen sind. Wir untersuchen ihr Additionstheorem und überhaupt die Funktionen e^x, $c(x)$, $s(x)$.

e^x und also auch $c(x)$ und $s(x)$ sind für jedes endliche x eindeutig bestimmt, es sind Funktionen von x. Daß sie auch stetig sind, folgt sofort aus dem Additionstheorem.

Beispielsweise geben wir den Beweis für e^x; es ist:

$$e^{x+\varepsilon} - e^x = e^x(e^\varepsilon - 1); \quad e^\varepsilon = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2!} + \cdots$$

$e^x(e^\varepsilon - 1)$ soll $< \delta$ werden. Man setze $\delta = \eta \cdot e^x$; aus der Reihe für e^ε folgt, daß $\varepsilon < \eta$ ist, und wenn η hinlänglich klein, ist sicher $\varepsilon < 3$, also:

$$e^\varepsilon < 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{3} + \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2 + \cdots\right),$$

also:

$$e^\varepsilon - 1 < \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)^{-1} < \varepsilon\left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{3}}\right) < \varepsilon\left(\frac{2 + \frac{1}{3}\varepsilon}{1 - \frac{\varepsilon}{3}}\right),$$

also:

$$e^\varepsilon - 1 < \frac{3\varepsilon}{1 - \frac{\varepsilon}{3}}.$$

Dies ist $< \eta$, wenn $\varepsilon < \frac{\eta}{3 + \frac{\eta}{3}}$ ist, also $e^x(e^\varepsilon - 1) < \delta$, wenn:

$$\varepsilon < \frac{\delta}{3e^x + \frac{\delta}{3}} < \frac{\delta}{4e^x}.$$

8. Analog ist der Beweis für $c(x)$ und $s(x)$, doch muß zuvor das Additionstheorem für $c(x)$ und $s(x)$ entwickelt werden. Es ist:

$$e^{\varphi i} = c(\varphi) + is(\varphi); \quad e^{\psi i} = c(\psi) + is(\psi);$$
$$e^{(\varphi+\psi)i} = c(\varphi+\psi) + i \cdot s(\varphi+\psi)$$
$$= c(\varphi)\cdot c(\psi) - s(\varphi)\cdot s(\psi) + i[c(\varphi)\cdot s(\psi) + s(\varphi)\cdot c(\psi)],$$

d. h. also: die Funktion c hat dasselbe Additionstheorem wie der Kosinus, und die Funktion s wie der Sinus. Nun ist für hinlänglich kleine Werte des arcus φ: $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ bis auf weniger als $\frac{\varphi^4}{4!}$ und ebenso $c(\varphi)$; für hinlänglich kleine Werte des φ ist also:

$$c(\varphi) = \cos\varphi \quad \text{und} \quad s(\varphi) = \sin\varphi,$$

und da die Additionstheoreme, d. h. die Fortsetzungen übereinstimmen, so ist $c(\varphi)$ gleich $\cos\varphi$ und $s(\varphi)$ gleich $\sin\varphi$ und wir haben:

$$\cos\varphi = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(\varphi) = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Es muß bemerkt werden, daß man für die algebraischen Betrachtungen die Geometrie nicht braucht und die Funktionen Kosinus und Sinus rein algebraisch durch die eben aufgestellten Reihen definieren kann, und zwar für reelle und komplexe Werte des Argumentes φ.

9. Was zunächst den Zahlencharakter der Zahl e betrifft, so hat zuerst Lambert 1770 durch Kettenbruchentwicklung die Irrationalität von e (und die von π) bewiesen. Äußerst einfach ist der Beweis von Fourier, den de Stainville in seinen *Melanges d'Analyses* von 1815 mitgeteilt hat: Wenn $e = \frac{p}{q}$ wäre, so wäre $e \cdot q!$ eine ganze Zahl n und gleichzeitig:

$$n = g + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} \cdots,$$

d. h.:

$$n < g + \sum_0^\infty \frac{1}{(q+1)^k}; \quad n < g + \frac{1}{q+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}}; \quad n < g + \frac{1}{q},$$

d. h. die Differenz zweier ganzer Zahlen wäre kleiner als der echte Bruch $\frac{1}{q}$.

Liouville hat in den *Comptes Rendus* von 1844 und in seinem Journal von 1845 die Existenz reeller Zahlen nachgewiesen, welche nicht die Wurzeln irgend einer algebraischen Gleichung mit rationalen, oder ganzzahligen Koeffizienten sein können, welche also keine algebraische Zahlen sind, und die man zum Unterschiede transzen-

dente Zahlen nennt. Diesen Nachweis hat G. Cantor, Crelle 77, 1873, noch vereinfacht 1891, außerordentlich viel einfacher erbracht. Er bewies, daß die Menge der algebraischen Zahlen mit der Zahlenreihe von der gleichen Mächtigkeit, d. h. gegenseitig eindeutig beziehbar ist.

10. Die algebraischen Zahlen sind die Wurzeln der algebraisch irreduziblen Gleichungen $a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} \ldots a_n = 0$, wo wir die a ganz und a_0 positiv machen können und die Gesamtheit der a ohne einen gemeinsamen Teiler. Der Beweis beruht ausschließlich auf dem Begriff der Höhe: $H = n - 1 + |a_0| = \cdots + |a_n|$.

Es lassen sich nun die algebraischen Zahlen nach ihrer Höhe H und innerhalb desselben H nach ihrem Wert ordnen, und dadurch erhalten wir sie in einer einfachen Reihe, eine erste, zweite, aber keine letzte. Zu jedem H gehört eine bestimmte Anzahl $f(H)$ von algebraischen Zahlen.

Ich gebe die Anfangswerte der Tabelle:

H	n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$f(H)$	Wurzel	Gleichung
1	1	1	0					1	0	$x = 0$
	2	0	0	0						
2	1	2	0					2	-1	$x \pm 1$
		1	1						$+1$	
	2	1	0	0						
3	1	3	0					4	-2	$2x \pm 1$
		2	1							
		1	2						$-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}$	$x \pm 2$
	2	2	0	0						
		1	1	0					$+2$	
		1	0	1						
	3	1	0	0	0					
4	1	4	0					12	-3	$3x \pm 1$
		3	1						$-1{,}61803$	
		2	2						$-1{,}41421$	$x \pm 3$
		1	3						$-0{,}70711$	
	2	3	0	0					$-0{,}61803$	
		2	1	0					$-0{,}333$	$2x^2 - 1$
		2	0	1					$+0{,}333$	
		1	2	0					+	$x^2 + x - 1$
		1	1	1					+	$x^2 - x - 1$
		1	0	2					+	$x^2 - 2$
	3	2	0	0	0				+	
		1	1	0	0				+	
		1	0	1	0					
		1	0	0	1					
	4	1	0	0	0	0				
5	1							22		

Wir haben nun schon bewiesen, daß die Mächtigkeit der reellen Zahlen von der zweiten Klasse ist, und damit ist der Satz bewiesen;

aber G. Cantor hat eine sehr einfache Rechenvorschrift gegeben, Zahlen zu bilden, die in dieser Tabelle nicht vorkommen können, und zwar in jedem noch so kleinen Intervall in unendlich-achtfacher Menge.

Denken wir uns z. B. im Zahlenintervall 0,6180 bis 0,6181 eine Zahl, welche als sechste Dezimale eine von 3 (und 9) verschiedene Ziffer (der Ausschluß der 9 erfolgt, um $0{,}618\,029\overline{9}$ auf alle Fälle auszuschließen), sowie als siebente Ziffer eine von 9 und der siebenten Ziffer, von $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$, das ist 0,707 11 verschiedene Ziffer und als achte Ziffer eine von der achten Ziffer der nächsten algebraischen Zahl, d. h. $\sqrt{2}$ und 9 verschiedene usf. hat, so erhalten wir eine reelle Zahl, die sicher nicht in der Tabelle vorkommt.

11. 1873 in *Comptes Rendus: Sur la Fonction exponentielle* und 1874 in einer selbständigen Schrift bewies Hermite auf sehr diffizile Weise mittels bestimmter Integrale die Transzendenz von e und anschließend daran 1882 Lindemann die von π. Der Beweis ist dann von Hilbert, Hurwitz, Gordan, Weber immer mehr vereinfacht worden. Sie finden diese rein algebraischen Beweise in F. Kleins „Vorträgen über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“ von 1895 und in Webers Enzyklopädie.

12. Wir haben auch vom rein arithmetischen Standpunkt aus die Formeln, welche als Eulersche Gleichung bekannt sind:

$$e^{\pm xi} = \cos x \pm i \sin x$$

und:

$$e^{nxi} = \cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n,$$

den Moivre, welcher in dieser Form auch zuerst bei Euler vorkommt. Die Funktionen e^x, $\cos x$, $\sin x$ können in Tabellen gebracht und auch graphisch dargestellt werden, denn sie sind stetig und differentiierbar. Es ist:

$$e^{x+\varepsilon} - e^x = e^x(e^\varepsilon - 1) = e^x\varepsilon\left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{3!} + \cdots\right),$$

daher:

$$\lim \frac{e^{x+\varepsilon} - e^x}{\varepsilon} = e^x.$$

Die Exponentialfunktion ist nicht nur stetig, sondern sie ist ihre eigene Ableitung. Wir finden als Ableitung von $\cos x$ den negativen Wert von $\sin x$, und $\sin x$ hat die Ableitung $\cos x$.

Die Exponentialfunktion ist durch die eben bewiesene Eigenschaft und $\varepsilon^0 = 1$ bestimmt. Es ist:

$$\begin{aligned} e^{a+\varepsilon} &= e^a(1+\varepsilon),\\ e^{a+2\varepsilon} &= e^{a+\varepsilon}(1+\varepsilon) = e^a(1+\varepsilon)^2,\\ e^{a+n\varepsilon} &= e^a(1+\varepsilon)^n. \end{aligned}$$

Ist $e^{n\varepsilon} = h$ und $\varepsilon = \frac{h}{n}$, wo n über jedes Maß groß, so ist:

$$e^{a+h} = e^a \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n,$$

$$e^{a+h} = e^a \sum n_k \frac{h^k}{n^k},$$

wo n über jedes Maß groß:

$$e^{a+h} = e^a \sum \frac{h^k}{k!},$$

und wenn $a = 0$ und $h = x$:

$$e^x = \sum \frac{x^k}{k!}.$$

XX. Abschnitt.

Der natürliche Logarithmus.

1. Die Reihe $\sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}$ oder e^x gab für die Grundzahl e die zusammenfassende Definition der Potenz; der Versuch, auch a^x allgemein zu definieren, mußte daraufhin gemacht werden. Die Aufgabe ist gelöst, wenn es gelingt, jede Zahl a als Potenz von e darzustellen. Denn ist $a = e^\alpha$, so ist:

$$a^x = e^{\alpha x} = \sum \frac{\alpha^k \cdot x^k}{k!}.$$

Man sieht, wäre die Logarithmenrechnung noch nicht erfunden, so müßte sie an dieser Stelle erfunden werden. Mit Recht heißt e die Basis des natürlichen Logarithmensystems.

Um den natürlichen Logarithmus von a zu finden, müßte die Gleichung unendlichhohen Grades $a = \sum_0^\infty \frac{\alpha^k}{k!}$ nach α aufgelöst werden. Da dies nicht ohne weiteres geht, so gehen wir von der Produktform aus, bzw. von der Relation:

$$f(\alpha) = \lim \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n, \quad \text{d. h.} \quad \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = a + \varepsilon_n,$$

wo $\lim e_n = 0$ ist; daher:

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) = (a + \varepsilon_n)^{\frac{1}{n}},$$

und da $\lim e_n = 0$, also für große Werte des n: $|a| > |e_n|$ ist, so ist nach dem Binom:

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}} + \frac{\varepsilon_n}{n} P(\varepsilon_n),$$

wo $P(\varepsilon_n)$ eine nach ganzen Potenzen von ε fortschreitende, konvergente Reihe vom Charakter einer Fundamentalreihe ist, also:

$$\alpha = n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) + \varepsilon_n P(\varepsilon_n); \quad \alpha = \lim \left(n a^{\frac{1}{n}} - n\right) + \lim \varepsilon_n \cdot P(\varepsilon_n),$$

also schließlich:

$$\alpha = \log \cdot a = \lim n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

2. Neper berechnete die Logarithmen, indem er $2^{64} = n$ setzte. Wir setzen, um zu der erforderlichen Radizierung, d. h. zur Berechnung von $a^{\frac{1}{n}}$ den Binom anzuwenden, $a = (1 + (a - 1)) = 1 + z$, und nehmen an, daß $|z| < 1$, d. h. wir beschränken uns auf die Zahlen zwischen 0 und 2, die Grenzen ausgeschlossen.

Dann ist:

$$a = \log (1 + z) = \sum_1^\infty (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k},$$

weil für $k + 0$:

$$\lim n \left(\frac{1}{n}\right)_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{ist.}$$

Der Ausdruck *logarithmus naturalis* sowie die Reihe rühren von Mercator 1667 her auf Grund des Satzes von Gregorius a St. Vincentio aus seinem bedeutsamen *opus geometricum* über den Flächeninhalt der auf die Asymptoten bezogenen gleichseitigen Hyperbel, wonach:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x \quad \text{ist.}$$

3) Die spezielle Lösung gibt nun, wie so häufig in der Analysis, auch die allgemeine. Jede Zahl r kann auf die Form gebracht werden: $r = \frac{1+z}{1-z}$, wo $z = \frac{r-1}{r+1}$ ist, also $|z| < 1$, wenn r eine positive, reelle Zahl ist. Dagegen, wenn r negativ ist, so ist $|z| > 1$ und die Reihe hört auf zu konvergieren. Man hat:

$$\log r = \log (1 + z) - \log (1 - z) = 2 \sum_0^\infty \frac{z^{2k+1}}{2k+1} = 2R(z),$$

wo $|z| < 1$ und z gleich $\frac{r-1}{r+1}$ ist. Für jede positive Zahl gibt also diese Reihe einen reellen Logarithmus. Diese Reihe und

ihre Entwicklung rührt von Halley her, bekannt durch seinen Kometen (Halley, Philosoph. Transakt. 1695). Zur wirklichen Berechnung ist die Reihe im allgemeinen zu schwach konvergent, da z sich rasch der Grenze 1 nähert. Auch erleidet die Arbeit keine Erleichterung durch die schon berechneten Logarithmen.

4. Von den zahllosen Umformungen erwähne ich a) die, mittels der Vega 1794 seinen *Thesaurus* berechnete; er setzte:

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{y^2}{y^2-1}, \quad \text{d. h. } z = \frac{1}{2y^2-1},$$

und erhielt dadurch:

$$\log y = \frac{1}{2}[\log(y-1) + \log(y+1)] + \sum_0^\infty \frac{z^{2k+1}}{2k+1}.$$

Ist y eine Primzahl p, so sind $y-1$ und $y+1$ durch 2 teilbar, und man hat:

$$\log p = \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{p-1}{2}\right) + \log\left(\frac{p+1}{2}\right)\right] + \log 2 + R(z),$$

wo $z = \frac{1}{2p^2-1}$.

Aus diesen Reihen findet man z. B.:

$$\log 2 = \frac{1}{2}\log 3 + R\left(\frac{1}{7}\right),$$

$$\log 3 = \frac{3}{2}\log 2 + R\left(\frac{1}{11}\right),$$

$$\log 5 = \frac{3}{2}\log 2 + \log 3 + R\left(\frac{1}{49}\right).$$

Sehr bequem ist auch:

b) $$\frac{1+z}{1-z} = \frac{y+h}{y}, \quad \text{wo } z = \frac{h}{2y+h},$$

$$\log(y+h) = \log y + 2[z], \quad \text{wo } [\,] \text{ für } R(z),$$

z. B.:

$$\log 7 = \log 2 + \log 3 + 2\left[\frac{1}{15}\right].$$

Man sieht hier, daß, wenn $\frac{h}{y}$ einigermaßen klein ist:

$$\log(y+h) - \log y = 2z = \frac{2h}{2y+h} = \frac{h}{y},$$

d. h. also: Die Zunahme des Logarithmus ist der Zunahme des Numerus proportional.

5. Noch einige Bemerkungen:

Die Reihe für $\log r$ konvergiert auch, wenn r eine komplexe Zahl p ist und ihre reelle Koordinate a positiv; denn wenn $p = a + ib$,

so ist $z = \frac{a-1+ib}{a+1+ib}$ und der absolute Betrag von z ist < 1, wenn 0 kleiner als $a[(a+1)^2+b^2]$ ist, und dies ist dann und nur dann richtig, wenn $a > 0$ ist. Die Reihe gilt also für alle komplexen Zahlen im ersten und vierten Quadranten der Gaußschen Ebene.

6. Interessant sind die Grenzfälle der Reihe für $\log(1+z)$, wo $z = -1$ ist:

$$\log(1-z) = -\left[1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \cdots\right] = -\infty.$$

Diese Reihe, die sogenannte harmonische Reihe, ist die bekannteste Widerlegung der Lagrangeschen Ansicht, daß eine Reihe konvergiere, wenn ihre Glieder schließlich unendlich klein werden. Es ist:

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} > \tfrac{1}{2}; \quad \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} > \tfrac{4}{8} > \tfrac{1}{2} \cdots;$$

$$\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{2n} > \frac{1}{2}.$$

An der Grenze $+1$ hat man:

$$\log(1+z) = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + (-1)^{k-1}\tfrac{1}{k} + \cdots.$$

In dieser Anordnung konvergiert die Reihe, weil aus:

$$\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) \cdots$$

folgt, daß ihr Wert $> \frac{1}{2}$ ist, und aus

$$1 - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3}\right)$$

folgt, daß ihr Wert < 1 ist, und es ist in der Tat, wie aus der Stetigkeit des Logarithmus folgt:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3 \cdot 4} + \tfrac{1}{5 \cdot 7} \cdots = \log 2.$$

Aber die Logarithmenreihe definiert keine Zahl der Zahlenreihe. Sie ist nicht konvergent unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder. Man bilde:

$$\log 2 = \sigma = \sum \sigma_k, \quad \text{wo} \quad \sigma_k = \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k}$$

ist, und setze:

$$\mu = \sum \mu_k, \quad \text{wo} \quad \mu_k = \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k},$$

also:

$$\mu = 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} \cdots,$$

(μ enthält also dieselben Glieder wie σ, aber in anderer Anordnung)

so ist:

$$\mu_k - \sigma_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right),$$

also:

$$\mu - \sigma = \frac{1}{2}\,\sigma \quad \text{und} \quad \mu = \frac{3}{2}\log 2.$$

Es läßt sich unschwer zeigen, daß eine solche bedingt konvergente Reihe je nach der Anordnung der Glieder jeden beliebigen Wert annehmen kann.

7. Da man für jeden absoluten Betrag den *logarithmus naturalis* berechnen kann, so muß noch für jede komplexe Einheit $\alpha + i\beta$ der Logarithmus berechnet werden.

Es war:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{\varphi i}; \quad \cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-\varphi i};$$

daher:

$$e^{2\varphi i} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = \frac{\alpha + i\beta}{\alpha - i\beta} = \frac{1 + i\frac{\beta}{\alpha}}{1 - i\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Den Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$, d. h. $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, nennt man tangens φ, seinen reziproken Wert cotangens φ. Auch diese gehören zu den trigonometrischen Funktionen und sind in Tabellen verzeichnet. Sei $\frac{\beta}{\alpha} = t$, so haben wir:

$$e^{2\varphi i} = \frac{1 + it}{1 - it} \quad \text{und} \quad 2\varphi i = \log\frac{1 + it}{1 - it},$$

und sobald $|t| < 1$ ist:

$$2\varphi i = 2i\sum_0^\infty (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1},$$

also:

$$\varphi = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1},$$

die Arcustangens-Reihe.

8. Ist $\alpha < \beta$, so kann man die Gleichung benutzen:

$$(\alpha + i\beta)(\beta + i\alpha) = i(\alpha^2 + \beta^2) = i.$$

Den Logarithmus von i gibt also die Reihe nicht, ebensowenig die Logarithmen der negativen Zahlen; man sieht, hier fehlt $\log(-1)$.

Aus der trigonometrischen Bedeutung der Funktion $\cos x$ und $\sin x$ wissen wir, daß für $\frac{\pi}{2}$ die Funktion $\cos x = 1$ und daher $\sin x = 0$ ist. Das kann und muß arithmetisch nachgewiesen werden.

Die Funktionen sind stetig, wie bewiesen. Solange nun $x^2 < 2$ ist, ist die Funktion:

$$\cos x = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right) + \cdots$$

sicher positiv; für $x = 1{,}5$ ist sie noch > 0, aber für $x = 1{,}6$ ist sie schon negativ. Sie muß also zwischen 1,5 und 1,6 durch 0 gehen. Durch weitere Eingrenzung berechnen wir als Nullstelle $2x = 3{,}1415926\ldots$, d. h. π, und daß dies der erste Wert > 0 ist, für den $\cos x$ durch Null geht, folgt daraus, daß ihre Ableitung, d. h. $-\sin x$ von $x = 0$ bis $x = 1{,}6$ sicher negativ ist. Wir haben:

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Aus dem Additionstheorem erhalten wir:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi,$$

ferner:

$$\sin \pi = 0, \quad \cos \pi = -1,$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = +\frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin 2\pi = 1, \quad \cos 2\pi = 0.$$

Somit geben die Eulerschen Gleichungen:

$$e^{\frac{\pi}{2} i} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{2\pi i} = 1.$$

9. Die fehlenden Logarithmen von i und -1 sind in $\frac{\pi}{2} i$ und πi gefunden; zugleich aber stoßen wir auf die wichtigste Eigenschaft der Exponentialfunktion und der mit ihr so nahe verwandten zyklischen Funktionen: auf die Periodizität. Es ist:

$$e^{x + 2\pi i} = e^x, \quad e^{2\pi i} = e^x,$$

und allgemein:

$$e^{x + 2k\pi i} = e^x, \quad \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \{x + 2k\pi\} = \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} x,$$

wo k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist.

Die Exponentialfunktion hat also die Eigenschaft, daß ihre Werte jedesmal, wenn man die imaginäre Koordinate des Argumentes um 2π vermehrt, wiederkehren. Ihre Periode ist $2\pi i$, während Kosinus und Sinus die reelle Periode 2π, ihre Quotienten Tangens und Kotangens die reelle Periode π besitzen. Das ganze Geschlecht ist als das der „einfach periodischen Funktionen“ charakterisiert.

Die Periodizität ist eine Folge der einfachen Additionstheoreme, und es ist nicht uninteressant, daß die gewöhnlich immer als Beispiel der Einfachheit angeführte Gleichung $1 \cdot 1 = 1$ vielleicht die komplizierteste, jedenfalls die folgenreichste Gleichung der Mathematik

ist, und sich hinter ihr die unendliche Vieldeutigkeit des Logarithmus verbirgt.

10. Jede komplexe Zahl $a + ib$ ließ sich auf die Form $(\alpha + i\beta)r$ bringen; r läßt sich durch die Reihe:

$$\log r = 2\sum \frac{z^{2k+1}}{2k+1} = \varrho$$

auf die Form e^{ϱ} bringen, wo ϱ eine reelle Zahl ist, $\alpha + i\beta$ auf die Form $e^{\varphi i}$ durch die Reihe für φ, die allerdings nur gilt, wenn t kontinuierlich von -1 bis $+1$ wächst und dann für φ die Werte von $-\frac{\pi}{4}$ bis $+\frac{\pi}{4}$ gibt. Man wendet sie direkt an, wenn α und β positiv und $\alpha > \beta$ ist; sind α und β positiv und $\alpha < \beta$, so ist:

$$e^{\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)i} = \sin\varphi + i\cos\varphi = \beta + i\alpha,$$

und man berechnet $\frac{\pi}{2} - \varphi$, indem man in die Arcustangens-Reihe für t den reziproken Wert einführt. Ist α negativ und $|\alpha| > \beta$, so benutzt man die Formel:

$$e^{(\pi-\varphi)i} = -\cos\varphi + i\sin\varphi = |\alpha| + i\beta$$

und berechnet $\pi - \varphi$, welches $< \frac{\pi}{4}$ ist. Sind α und β beide negativ, so gibt die Reihe denselben Wert, wie wenn beide positiv wären; wäre dieser φ_0, so wäre $\varphi = \pi + \varphi_0$, usw.

Man sieht, daß für jedes $\alpha + i\beta$ sich ein und nur ein Wert φ zwischen 0 und 2π findet, so daß $e^{\varphi i} = \alpha + i\beta$ ist. Denn wäre $e^{\psi i}$ auch gleich $\alpha + i\beta$, so müßte $e^{(\varphi-\psi)i} = 1 = e^{k\pi i}$ sein.

Jede Zahl $a + ib$ läßt sich jetzt auf die Form bringen: $e^{\varrho+\varphi i+2k\pi i}$, wo φ zwischen 0 und 2π liegt, 2π ausgeschlossen, ϱ eine reelle Zahl und k eine ganze Zahl ist, d. h. zu jeder Zahl gehören unendlich viele Logarithmen, der zu $k = 0$ gehörige heißt der Hauptlogarithmus. Ist $a + ib = r$, dann ist $\varphi = 0$, der Hauptlogarithmus $= \varrho$; ist $-a + ib = -r$, so ist $\varphi = \pi$ und der Hauptlogarithmus ist gleich $\varrho + i\pi$; der Hauptlogarithmus von $i = \frac{\pi}{2}$, der von $-i$ ist nicht gleich $-\frac{\pi}{2}$, sondern gleich $\frac{3}{2}\pi$.

11. Es folgt, daß die Definition von $a^x = e^{\alpha x}$ keine bestimmte ist. Wir bekommen jetzt auch Aufschluß über die Vieldeutigkeit der Wurzel. Es ist $a = e^{\alpha+2\pi ik}$, wo α den Hauptlogarithmus bezeichnet. Es ist also:

$$a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi ik}{n}} \quad \text{oder gleich} \quad e^{\frac{\alpha}{n}} e^{\frac{2\pi ik}{n}}.$$

Aber $e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ oder $\sqrt[n]{1}$ hat n verschiedene Werte, die man erhält, wenn man k von 0 bis $n-1$ laufen läßt, da aus

$$e^{\frac{2\pi i k}{n}} = e^{\frac{2\pi i k'}{n}}$$

folgt, daß $\frac{k-k'}{n}$ eine ganze Zahl ist; also hat die $\sqrt[n]{a} = e^{\frac{\alpha}{n}} \cdot \sqrt[n]{1}$ ebenfalls n verschiedene Werte. Man könnte $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\alpha+2\pi i}{n}}$ setzen und diese Gleichung wäre jetzt eine vollständige, da die beiden Seiten n verschiedene Werte haben. Man stößt aber wieder auf die im XII. Abschnitt bemerkte Schwierigkeit. Es ist a^2 nicht gleich $e^{2\alpha+4k\pi i}$, sondern $a^2 = e^{2\alpha+2k\pi i}$ und deshalb $a^{\frac{2}{6}}$ nicht identisch mit $a^{\frac{1}{3}}$, da $a^{\frac{2}{6}}$ sechs Werte haben würde und $a^{\frac{1}{3}}$ nur drei. Es ist daher vorzuziehen, daß wir a^x definieren als $e^{\alpha x}$, wo α der Hauptlogarithmus ist, und die Vieldeutigkeit an das Wurzelzeichen knüpfen.

Die Vieldeutigkeit des Logarithmus wurde von Euler gelegentlich der Frage nach den Logarithmen der negativen Zahlen bemerkt; die Fragen sind noch immer nicht völlig geklärt. So ist z. B. neuerdings in der Hoffmannschen Zeitschrift eine Note veröffentlicht, derzufolge eine negative Zahl bei positiver Basis auch reelle Logarithmen haben könnte; sie geht von dem falschen Obersatz aus: es ist immer ${}^b\log a = {}^e\log a : {}^e\log b$ ein Satz, der nur für die Hauptlogarithmen von b auf der rechten Seite richtig ist; wenn

$$a = b^x \quad \text{und} \quad a = e^{\alpha+2k\pi i} \quad \text{ist und} \quad b = e^{\beta+2\lambda\pi i},$$

so ist nicht: $$b^x = e^{\beta\cdot x+2\lambda\pi i x},$$

sondern:

$$b^x = e^{\beta x+2\lambda\pi i}, \quad \text{also:} \quad x = \frac{\alpha+2h\pi i}{\beta}.$$

Bei einer solcher ungenauen Definition des Logarithmus könnten ebenso auch komplexe Zahlen reelle Logarithmen haben.

12. Die Periode π selbst kann mit der Arcustangens-Reihe bequem berechnet werden. Die Reihe ist zuerst von David Gregory am 15. Februar 1671 an Collins, der zum Newtonschen Kreise gehörte, mitgeteilt. Sie ist dann von Leibniz 1673 durch Zerlegung des Sektors in unendlich viele Teile selbständig abgeleitet worden. Leibniz gab für $t = 1$, zu welchem Werte nach den Additionstheorem $\frac{\pi}{4}$ gehört, die bedingt konvergente Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots,$$

die ihn zu dem Ausspruch: *deus quidem numero gaudet impari* (Gott freut sich der ungeraden Zahl) begeisterte. Es lassen sich beliebig stärker konvergierende Reihen ableiten, die auf der Eulerschen Formel beruhen (Euler: *de variis methodis circuli quadraturae numeris proxime exprimendae; Petropolit.* T. IX p. 222):

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = \operatorname{arctg}\frac{ax-y}{ay+x} + \operatorname{arctg}\frac{1}{a}.$$

Wir erwähnen die Formel von Schulz (von Strasnicki), mit der Dahse, Crelle 27, S. 198 π auf 206 Stellen berechnete:

$$\frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$$

und die von Machin 1706:

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

Es ist:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

und wenn $\operatorname{tg}\cdot\varphi = \frac{1}{5}$, so ist:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{5}{12},\ \operatorname{tg} 4\varphi = \frac{200}{119},\ 4\varphi = \frac{\pi}{4} + \psi,\ \operatorname{tg}\psi = \frac{1}{239}.$$

13. Es ist eben so einfach wie lohnend, den Zusammenhang von *logarithmus naturalis* und Numerus, also von x und e^x geometriseh zu versinnlichen. Nehmen wir für x und e^x je eine Gaußsche Zahlenebene, bewegt sich x auf der reellen Achse von $-\infty$ bis $+\infty$, so beschreibt e^x den reellen positiven Strahl von 0 bis ∞.

Durchläuft x eine Parallele zur reellen Achse im Abstand b, so dreht sich der Numerus in die Richtung, die der Bogen b des Einheitsstrahles angibt. Wenn sich also x um 2π gehoben hat, hat der Numerus eine volle Umdrehung ausgeführt, und jedesmal nach einer Änderung der imaginären Koordinate des Logarithmus um 2π kehrt die Exponentialfunktion in die frühere Richtung zurück.

Während der Logarithmus also einen Streifen von der Breite 2π bedeckt, bedeckt e^x ihre ganze Ebene, und wenn x die Halbebene ausgefüllt hat, in Parallelen zur Achse $+1$, hat e^x ihre Ebene unendlich oft bedeckt. Dennoch sind beide von gleicher Mächtigkeit, eine gute geometrische Verifikation der Cantorschen Sätze.

Durchläuft x die Parallele zur i-Achse im Abstande a, so beschreibt e^x den Kreis mit dem Radius e^a und jedem Abschnitt der Parallelen von der Länge 2π entspricht ein voller Umlauf. Die Abbildung des Logarithmus $a+ib$ geschieht also in der Weise, daß die imaginäre Koordinate b von $+1$ aus auf dem Einheitskreis auf-

gewickelt wird und der Radius in dieser Richtung auf die Länge e^a gebracht wird.

Lassen wir den Logarithmus ein Rechteck, dessen Ecken:

$$a + ib, \quad a_1 + ib, \quad a_1 + ib_1, \quad a + ib_1$$

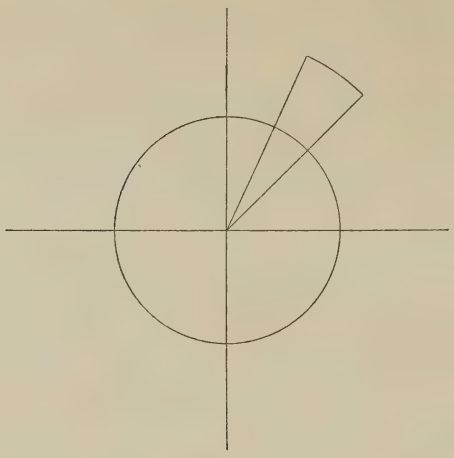

Fig. 8.

sind, durchlaufen, so durchläuft der Numerus den Sektor eines Kreisrings mit den Koordinaten der Ecken:

$$e^a, b; \; e^{a_1}, b; \; e^{a_1}, b_1; \; e^a, b_1 \quad \text{(Fig. 8)}.$$

Die Abbildung ist eine konforme (winkeltreue), da der Radius auf dem Bogen senkrecht steht.

Namenregister.

Alsted, J H., 3.
Archimedes 66, 69.
Argand, F., 93.
Aristoteles 23
Atelhard (von Bath) 25.

Bardey, E., 44.
Baumeister, A., 2.
Beda (Venerabilis) 44.
Bernoulli, J., 13, 43, 63.
Bolzano, B., 5, 45.
Bombelli, Raf., 24.
Böttcher, K., 28.
Briggs, H., 66, 67, 68.
Bring, E. J., 89.
Bürgi, Jobst, 35, 52, 66, 69.
Cantor, G., *V.*, 2, 10 (*m*), 23 (*m*), 48 (*m*), 49 (*m*), 50, 51, 80, 90, 95, 96, 105.
Cardano, Hier., 24, 76, 77 (*m*), 78.
Cauchy, A., 80.
Chuquet, N., 14, 19, 24, 66 (*m*), 69.
Clairaut, A. C., 43.
Collins, J., 104.

De Dacia (siehe Petrus).
Dahse, Z., 7, 105.
Dedekind, R., *V.*, 2, 48, 49, 50, 51.
Descartes, R., 43, 79.
Diophant 24, 41, 44.

Eisenstein, F. G. M., 88.
Euklid 31, 60.
Euler, L., 43, 63, 66, 71, 92, 102, 104, 105.

Fermat, P. de, 79.
Ferrari, L., 78.
Del Ferro (Ferreus), Scipione, 77 (*m*), 78.
Fiori (Floridus) 77.
Fourier, J. B., 63, 94.
Français 83.
Frisius, Gemma, 8,

Gauß, J. C. F., 2, 79, 80 (*m*), 83 (*m*), 100, 105.
Girard, A., 53, 66.
Glaisher, J. W. L., 30.
Gordan, P., 96.
Graßmann, H., 2.
Graßmann, R., 2.
Gregori, David, 104.
Gregorius a St. Vincentio 98
Griffiths 15.

Halley, E., 99.
Hamilton, Rowan, 5, 84.
Hankel, H., 12, 16 (*m*).
Heiß, E., 44.
Hermite, Ch., 96.
Hilbert, D., 96.
Hilprecht, H. V., 22.
Hirsch, Meyer, 44.
Hudde, J., 77.
Hurwitz, A., 96.
Hypatia 37.

Jacob, Sim., 69.
Jacobi, C. G. J., 2.
v. Jauer (siehe Rudolph).
Jordanus (Nemorarius) 52, 56, 66.

Kant, I., 4.
Kästner, A. G., 13.
Kepler, J., 35.
Kewitsch G., 21.
Klein, F., 96.
Kossak, E., 50.
Kramp, C., 70.
Kronecker, L., 88.
Kummer, E. E., 1.

Lagrange, L. de, 100.
Lambert, J. H., 94.
Lampe, E., 86.
Lange, F. A., 5.
Legendre, A. M., 6, 64.
Leibniz, G. W., 22, 43, 63.

Leonardo (Pisano) 36, 44.
Lindemann, F., 96.
Liouville, J., 94.
Lorberg, H., 2, 4.
Lüroth, J., 40.

Machin 105.
Mercator, G., 98.
Meyer, Fr., 16.
De Moivre, Abr, 85.
Monge, G., 2.
Muhamed Ben Musa Alchwarizmi 25.

Della Nave 78.
Nemorarius (siehe Jordanus).
Neper, J., 52, 66, 68, 98.
Newton, Is., 66, 75.
Nikomachus (von Gerasa) 22.

Oresme, N., 66
Ougthred, W., 22.

Pacciolo, Luca, 44, 66.
Park, Mungo, 3.
Petrejus 77.
Petrus (de Dacia) 22.
Pflieger, W., 16.
Platon 23.
Poincaré, H., 1, 2, 7.

Recorde 43.
Regiomontan 35.
Riemann, B., 64.
Riese, Adam, 24, 53.
Rudolph (von Jauer), Ch., 22.

Sargon 16.
Schopenhauer, A., 4.
van Schooten, Frz., 79.
Schulz von Strasnicki, K., 105.
Schwarz, H. A., 64.
De Stainville, L., 94.
Stevin, S., 35 (*m*), 53.
Stifel, M., 24, 66, 69.
Sturm, Joh. Chr., 44.

Tartaglia, Nic., 24, 77 (*m*), 78 (*m*).
Theon 57.
Tonstall, C., 26.
Tschirnhausen, Walth. von, 77, 86.

Vega, G., 69, 99.
Vieta, Fz., 35, 43, 79.
Vlacq, Adr., 69.

Weber, H, 41, 48, 88.
Weierstraß, C., *V*, 2 (*m*), 12, 17, 18, 50 (*m*), 51, 64 (*m*), 82.
Wessel, Casp, 83.

Neuester Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

I. **Arithmetik und Algebra,** 2 Teile, red. von **W. Frz. Meyer.**
I. Teil. [XXXVIII u. 554 S.] geh. *M.* 17.—, in Halbfranz geb. *M.* 20.—
II. Teil. [X u. S. 555—1197.] geh *M.* 19.—, in Halbfranz geb. *M.* 22.—

II. **Analysis,** 2 Teile, red. von **H. Burkhardt** und **W. Wirtinger.**
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1899. *M.* 4.80; 2./3. [240 S.] 1900. *M.* 7.50; 4. [160 S.] *M.* 4.80. 5. [199 S.] 1904. *M.* 6.—
II. Teil. Heft: 1. [175 S.] 1901. *M.* 5.20.

III. **Geometrie,** 3 Teile, red. von **W. Frz. Meyer.**
II. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. *M.* 4.80.
II. Teil. Heft: 2. [96 S.] 1904. *M.* 2.80.
III. Teil. Heft: 1. [183 S.] 1902. *M.* 5.40.
——— Heft: 2/3. [256 S.] 1903. *M.* 6.80.

IV. **Mechanik,** 2 Teile, red. von **F. Klein** u. **C. H. Müller.**
I. Teil. I. Abt. Heft: 1. [121 S.] 1901. *M.* 3.40; 2. [156 S.] 1902. *M.* 4.60. 3. [156 S.] 1903. *M.* 4.60.
——— II. Abt. Heft: 1. [152 S.] 1904. *M.* 4.40.
II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1901. *M.* 3.80; 2. [131 S.] 1903. *M.* 3.80.

V. **Physik,** 2 Teile, red. von **A. Sommerfeld.**
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. *M.* 4.80.
——— Heft: 2. [159 S.] 1905. *M.* 4.80.
II. Teil. Heft: 1. [280 S.] 1904. *M.* 8.—

VI. 2: **Astronomie,** red. von **K. Schwarzschild.**
Heft: 1. [193 S.] 1905. *M.* 5.80

Unter der Presse:

VI. 1: **Geodäsie und Geophysik,** red. von **Ph. Furtwängler** und **E. Wiechert.**

In Vorbereitung:

VII. **Historische, philosophische und didaktische Fragen** behandelnd, sowie **Generalregister.**

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Publiée sous les auspices des Académies des sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk, professeur à l'université de Nancy. En sept tomes. Tome I: vol. 1, fasc. 1. [160 pag.] gr. 8. 1904. n. *M.* 4.—

Abraham, Dr. **M.,** Privatdozent an der Universität Göttingen, Theorie der Elektrizität. I. Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Dr. A. Föppl. Zweite, umgearbeitete Auflage von Dr. M. Abraham. Mit 11 Figuren im Text. [XVIII u. 443 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—. II. Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von Dr. M. Abraham. [X u. 404 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 10.—

Ahrens, Dr. **W.,** in Magdeburg, Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. [X u. 522 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 8.—

——— mathematische Unterhaltungen und Spiele. [X u. 428 S.] gr. 8. 1901. In Original-Leinwandband mit Zeichnung von P. Bürck in Darmstadt n. *M.* 10.—

Alexandroff, Dr. **Iwan,** Professor der Mathematik am Kaiserlich Russischen Gymnasium zu Tambow, Aufgaben aus der niederen Geometrie. Nach Lösungsmethoden geordnet und zu einem Übungsbuch zusammengestellt. Mit einem Vorwort von Dr. M. Schuster, Professor am Gymnasium zu Eutin, und 100 Figuren im Text. [VI u. 123 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. *M.* 2.40.

Börnstein, Dr. **R.,** und Dr. **W. Marckwald,** Professoren an der Universität Berlin, sichtbare und unsichtbare Strahlen. Mit 82 Abbildungen im Text. [VI u. 142 S.] 8. 1905. geh. *M.* 1.—, in Leinw. geb. *M.* 1.25.

Cesàro, Ernesto, Professor der Mathematik an der Königl. Universität zu Neapel, elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript d. Verf. deutsch hrsg. von Dr. G. Kowalewski, Professor an der Universität Greifswald. Mit 97 Figuren im Text. [VI u. 894 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 15.—

Engel, Dr. **Friedrich,** Professor an der Universität Greifswald und Dr. **Paul Stäckel,** Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Hannover, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Mit vielen Figuren im Texte. In zwei Bänden. gr. 8. geh.

I. Band: **Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij,** zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von Friedr. Engel. I. Teil: Die Übersetzung. Mit einem Bildnisse Lobatschefskijs und mit 194 Figuren im

Text. II. Teil: Anmerkungen. Lobatschefskijs Leben und Schriften. Register. Mit 37 Figuren im Text. [XVI, IV u. 746 S.] 1899. geh. n. *M.* 14.—, in Halbfrzbd. geb. n. *M.* 15.40.

II. Band: **Wolfgang und Johann Bolyai**, geometrische Untersuchungen, herausgegeben von Paul Stäckel. Mit einem Bildnisse Wolfgang Bolyais. [In Vorbereitung.]

Fiedler, Dr. **W.**, Professor am Polytechnikum zu Zürich, die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 4. Aufl. In 3 Teilen. I. Teil: Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projektiven Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text und auf 2 Tafeln. [XXIV u. 431 S.] gr. 8. 1904. geh. n. *M.* 10.—, in Leinw. geb. n. *M.* 11.—

Fisher, Dr. phil. **Irving**, Professor der Nationalökonomie an der Yale Universität, kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung (Infinitesimalrechnung). Aus der durch mehrere Verbesserungen des Verfassers vervollständigten dritten englischen Ausgabe übersetzt von N. Pinkus. Mit 11 Figuren im Text. [VI u. 72 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 1.80.

Fort, **O.** und **O. Schlömilch**, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Teil. Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort, weil. Professor am Kgl. Sächs. Polytechnikum zu Dresden. 7. Aufl. bes. v. Dr. R. Heger, Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Dresden. Mit in den Text gedruckt. Holzschn. [XVII u. 268 S.] gr. 8. 1904. geh. n. *M.* 4.—, geb. n. *M.* 4.80.

Gleichen, Regierungsrat Dr. **A.**, Privatdozent an der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin, Lehrbuch der geometrischen Optik. Mit zahlreichen Abbildungen im Text. [XIV u. 511 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 20.—

Grassmanns', **Hermann**, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel, Professor an der Universität Greifswald.

II. Band. I. Teil. Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis. Mit 45 Figuren im Text. [X u. 452 S.] gr. 8. 1904. geh. n. *M.* 16 —

II. — II. — Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Figuren im Text. [VIII u. 266 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 14.—

Heffter, Dr. **L.**, Professor an der Universität Kiel, und Dr. **C. Koehler**, Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Band: Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Mit 136 Figuren im Text. [XVI u. 528 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 14.—

Klein, Geheimer Regierungsrat Dr. **Felix**, Professor an der Universität Göttingen, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Ausgearbeitet von F. Tägert. Eine Festschrift zu der Pfingsten 1895 in Göttingen stattfindenden 3. Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Mit 10 Figuren im Text und 2 lithogr. Tafeln. [V u. 66 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M.* 2.—, in Leinwand geb. n. *M.* 2.80.

——— und Dr. **E. Riecke**, Professor an der Universität Göttingen, neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an höheren Schulen. Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. Enthaltend Beiträge der Herren O. Behrendsen, É. Bose, E. Götting, F. Klein, E. Riecke, F. Schilling, J. Stark, K. Schwarzschild. gr. 8. 1904. Teil I. Mit 6 Figuren im Text. [VIII u. 190 S.] geh. n. *M.* 3.60. Teil II. Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] geh. n. *M.* 4.60, geb. n. *M.* 5.— Beide Teile in einen Band geb. n. *M.* 8.60.

Kohlrausch, Wirkl. Geh. Oberregierungsrat, Prof. Dr. **F.**, in Marburg, Lehrbuch der praktischen Physik. Zehnte, vermehrte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. Mit zahlr. Figuren im Text. [XXVIII u. 656 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 9.—

Koenigsberger, Geheimrat Dr. **Leo**, Professor an der Universität Heidelberg, Carl Gustav Jacob Jacobi. Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages. Mit einem Bildnis und dem Faksimile eines Briefes. [XVIII u. 554 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M.* 16.—

Lobatschefskijs, N. G., imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von Dr. Heinrich Liebmann, Professor an der Universität Leipzig. Mit 39 Figuren im Text und einer Tafel am Schluß. (A. u. d. Titel: Abhandlungen z. Geschichte d. mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XIX. Heft.) [XI u. 187 S.] gr. 8. 1904. geh. n. *M.* 8.—

Loria, Dr. **Gino,** Professor der höheren Geometrie an der Universität zu Genua, die hauptsächlichsten Theorien der Geomtrie, in ihrer früheren und jetzigen Entwickelung. Historische Monographie. Unter Benutzung zahlreicher Zusätze und Verbesserungen seitens des Verfassers ins Deutsche übertragen von Fritz Schütte, Oberlehrer am Gymnasium zu Düren. Mit einem Vorworte von Professor R. Sturm. [VI u. 132 S.] gr. 8. 1888. geh. n. *M.* 3.—.

Mie, Dr. **G.,** Professor an der Universität Greifswald, Moleküle — Atome — Weltäther. Mit 27 Figuren im Text. [IV u. 138 S.] 8. 1904. geh. *M.* 1.—, in Leinw. geb. *M.* 1.25.

Müller, Dr. **Conrad H.,** Professor in Göttingen, Studien zur Geschichte der Mathematik insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert. Mit einer Einleitung: Über Charakter und Umfang historischer Forschung in der Mathematik (Sonderabdruck aus dem XVIII. Heft der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik). [X u. 94 S.] gr. 8. 1904. geh. n. *M.* 2.—

Netto, Dr. **Eugen,** Professor an der Universität Gießen, elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. Mit 19 Figuren im Text. [VIII u. 200 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 4.40.

Nielsen, Dr. **Niels,** Dozent der reinen Mathematik an der Universität Kopenhagen, Inspektor des mathematischen Unterrichts an den Gymnasien Dänemarks, Handbuch der Theorie der Gammafunktion. [X u. 326 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—

Pascal, Ernst, Professor an der Universität zu Pavia, Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Literatur). Autorisierte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals von A. Schepp, weiland Oberleutnant a. D. in iWesbaden. In 2 Teilen: Analysis und Geometrie. I. Teil: Die Analysis. [XII u. 638 S.] gr. 8. 1900. Biegsam in Leinw. geb. n. *M.* 10.—. II. Teil: Die Geometrie. [IX u. 712 S.] gr. 8. 1902. Biegsam in Leinw. geb. n. *M.* 12.—

Perry, Professor **John,** Drehkreisel. Volkstümlicher Vortrag, gehalten in einer Versammlung der „British Association" in Leeds. Übersetzt von Dr. August Walzel, Professor an der k. k. Technischen Hochschule in Brünn. Mit 58 Abbildungen im Text und einem Titelbild. [VIII u. 125 S.] 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 2.80.

Poincaré, Henri, Membre de l'Institut, Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. [XVI u. 342 S.] 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 4.80. (2. Auflage unter der Presse.)

Reichel, Dr. **Otto,** Professor an der Königl. Landw. Hochschule zu Berlin, Vorstufen der höheren Analysis und analytischen Geometrie. Mit 30 Figuren im Text. [X u. 111 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 2.40.

Richarz, Dr. **F.,** Professor an der Universität Marburg, neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität. 2. Auflage. Mit 97 Abbildungen. [VI u. 128 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. *M.* 1.50.

Schilling, Dr. **Friedrich,** Professor an der Technischen Hochschule zu Danzig, über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Mit einem Anhang: Welche Vorteile gewährt die Benutzung des Projektionsapparates im mathematischen Unterricht? Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] gr. 8. 1904. geh. n. *M.* 4.60, in Leinw. geb. n. *M.* 5.—

Schlömilch, weil. Geheimer Regierungsrat Dr. **Oskar,** Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. I. Teil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. 5. Auflage, bearbeitet von Dr. E. Naetsch, Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Dresden. Mit 85 Figuren im Text. [VIII u. 372 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 8.—

Schüssler, Dr. **Rudolf,** Professor an der Technischen Hochschule zu Graz, orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Mit 29 Figurentafeln in besonderem Hefte. [VIII u. 170 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 7.—

Seliwanoff, Demetrius, Privatdozent an der Universität St. Petersburg, Lehrbuch der Differenzenrechnung. [IV u. 92 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 4.—

Starke, Dr. **H.,** Privatdozent in Berlin, experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse dargestellt. Mit 275 in den Text gedr. Abb. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 6.—

Staude, Dr. **Otto,** Professor an der Universität Rostock, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Figuren im Text. [VIII u. 447 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 14.—

Stolz, Dr. **Otto,** weil. Professor an der Universität Innsbruck, und Dr. **J. Anton Gmeiner,** Professor an der deutschen Universität Prag, Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. Mit 21 Figuren im Text. [X u. 598 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 15.—

Auch in 2 Abteilungen:

I. Abteilung. Mit 10 Figuren im Text. [VI u. 242 S.] 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 6.—

II. — Mit 11 Figuren im Text. [VIII u. S. 243—612.] 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 9.—

Sturm, Dr. **R.,** Professor an der Universität Breslau, Elemente der darstellenden Geometrie. 2., umgearb. u. erw. Aufl. Mit 61 Textfig. u. 7 lithogr. Tafeln. [V u. 157 S.] gr. 8. 1900. In Leinw. geb. n. *M.* 5.60.

Thomae, J., Geheimer Hofrat und Professor an der Universität Jena, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. [IV u. 44 S.] 4. 1905. kart. n. *M.* 2.80.

Vahlen, Dr. **Karl Theodor,** Professor an der Universität Heidelberg, abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XII u 302 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—

Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, vom 8. bis 13. August 1904. Herausgegeben von dem Schriftführer des Kongresses Dr. A. Krazer, Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe. Mit einer Ansicht von Heidelberg in Heliogravüre. [X u. 756 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 18.—

Vivanti, G., Professor an der Universität Messina, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers deutsch hrsg. von Dr. A. Gutzmer, Professor an der Universität Halle a. S. [VI u. 512 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—

Weber, Dr. **H.,** Professor in Straßburg, und Dr. **J. Wellstein,** Professor in Straßburg, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. I. Band. Elementare Algebra und Analysis. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 9.60. II. Band. Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. Mit 280 Textfiguren. [XII u. 604 S.] 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—. (Bd. III. Anwendung der Elementarmathematik. Unter d. Presse.)

Wölffing, Dr. **Ernst,** Professor an der Königl. Techn. Hochschule zu Stuttgart, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis d. wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher u. Monographien d. 19. Jahrhunderts a. d. Gebiete d. mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XVI, 1. [XXXVI u. 416 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 14.—, in Leinw. geb. n. *M.* 15.—

Zeuthen, G. H., Professor an der Universität Kopenhagen, Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. Deutsch von Raphael Meyer. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XVII. Heft. [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 16.—, in Leinw. geb. n. *M.* 17.—

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
513SI5M C001
METHODIK DER ELEMENTAREN ARITHMETIK IN V
3 0112 017106243